РАЗСУЖДЕНІЕ

ОБЪ

ОБЩЕЙ ТЕОРІИ РАВНОВѢСІЯ.

СЪ ПРИЛОЖЕНІЕМЪ

КЪ РАВНОВѢСІЮ ЖИДКИХЪ ТѢЛЪ И ОПРЕДѢЛЕНІЮ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ.

Ѳедора Чижова.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

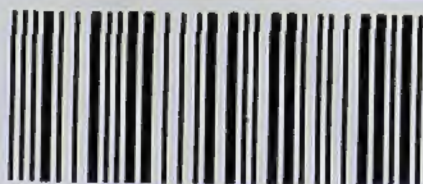
Въ типографіи Конрада Вингебера.

1836.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ

по опредѣленію Университетскаго Совѣта. Мая 4-го дня 1836 года.

Секретарь Совѣта Надворный Совѣтникъ
Александръ Брутъ.



ВСТУПЛЕНІЕ.

Историческое развитіе есть самый удобный путь для того, чтобъ передать другимъ какую либо идею и самый легкій для того, чтобъ хорошо понять ее и совершенно съ нею ознакомиться. Тутъ видимъ мы, какъ идея является на свѣтъ, что ей предшествовало, что, такъ сказать, вызвало ее изъ непроницаемаго мрака, который окружаетъ ея спутницъ, ожидающихъ такой же минуты явленія. Видимъ первыя формы, въ какихъ предстала она генію, ее постигшему, слѣдимъ за ея дѣтствомъ, замѣчаемъ всѣ перемѣны ея формъ въ различныя степени ея возраста, сближаясь съ нею болѣе, и болѣе, достигаемъ до предѣловъ ея развитія; неприметно такимъ образомъ усвоиваемъ ее себѣ, и она дѣлается какъ бы нашимъ достояніемъ, какъ бы собственнымъ нашимъ открытіемъ.

Слѣдуя этому убѣжденію, я прежде всего принялся за Исторію Теоріи равновѣсія, которую предлагаю я въ этомъ разсужденіи, съ тѣмъ намѣреніемъ, чтобъ, изложивъ ее, показать вмѣстѣ всѣ существующія по сіе время начала этой Теоріи, и наконецъ, дойдя до послѣдняго, сравнить ихъ между

собою, и этимъ самымъ оцѣнить относительное достоинство каждаго. Но Исторія какого бы то ни было предмета, какъ собраніе всѣхъ фактовъ, всѣхъ явленій съ нимъ случавшихся, требуетъ необходимо знанія всѣхъ ихъ, даже самыхъ ничтожныхъ, потому что, не зная этихъ послѣднихъ, мы не имѣемъ права и не можемъ заключать объ ихъ ничтожности; а такое знаніе предполагаетъ глубокую начитанность и, слѣдовательно, требуетъ много времени. Къ тому же, знакомясь съ первоначальными формами идеи, мы должны входить, такъ сказать, въ патріархальное время науки, должны усвоивать себѣ тѣ понятія, которыхъ самая простота кажется намъ странною, подробности и мѣлкія изслѣдованія скучными, потому что, принимая ихъ съ самаго дѣтства, мы такъ съ ними сближаемся, что невольно считаемъ врожденными всему человѣчеству а не пріобрѣтаемыми вѣковыми трудами. Вотъ причины, которыя, еще болѣе замедляя чтеніе древнихъ авторовъ, еще болѣе отнимаютъ и времени.

Не смотря на это, я не оставилъ бы моего намѣренія, еслибъ обстоятельство другаго рода не заставило меня перемѣнить планъ моего разсужденія, и вмѣсто историческаго развитія, изложить эту самую Теорію въ настоящемъ ея состояніи. Обязанная существованіемъ знаменитѣйшему изъ древнихъ геометровъ — Архимеду (250 лѣтъ до Р. Х), который и передалъ ее въ двухъ книгахъ своихъ *de Aequiponderantibus* или *de Planorum aequilibriis*, она была какъ бы слѣдствіемъ теоріи рычага имъ изобрѣтеннаго, а потому и начало, на которомъ она была основана, приняло названіе *начала рычага (principe du*

levier). Въ послѣдствіи времени она принимала измѣненія или, лучше сказать, расширяла предѣлы свои, неизмѣняясь въ своихъ основаніяхъ, до тѣхъ поръ, пока не ввелось въ Механику новое начало— *начало составленія силъ (principe de la composition des forces,)* извѣстное еще въ древности; но которое только лишь въ XVII столѣтіи было *вполнѣ* приложено къ теоріи равновѣсія, когда Ньютонъ показалъ, что законы равновѣсія выводятся весьма легко изъ сложенія и разложенія силъ, принимая діагональ паралелограмма за силу равнодѣйствующую двухъ другихъ, выраженныхъ по величинѣ и по направленію двумя боками его. Это начало, выведенное сперва изъ законовъ движенія и потомъ независимо отъ него доказанное Даніиломъ Бернулли, Даламбертомъ и другими и по сіе время весьма часто, и даже большею частію, употребляется въ изложеніяхъ первыхъ основаній Статики.

Но еще гораздо прежде, нежели оно было введено въ Статику, даже еще прежде Архимеда мы встрѣчаемъ у Аристотеля (за 320 л. до Р. Х), въ 6-й главѣ VII-й книги его *Naturae auscultationes:* »*Si* »*igitur α est quod movet, β quo movetur, γ longitudo* »*per quam motum est, δ tempus quo movetur, sane ae*»*quali tempori δ, aequalis vis α, dimidium ipsius β mo*»*vebit per longitudinem duplo majorem quam γ... т. е.*« иными словами, что когда массы тѣлъ обратно пропорціональны скоростямъ, тогда и силы, отъ которыхъ эти скорости зависятъ (разумѣется, при одинаковомъ времени), равны между собою. Ту же самую истину мы видимъ послѣ и у другихъ геометровъ, какъ напр. у Гвидо Убальди, Галлилея и Де-

карта; послѣдніе два смотрѣли даже на нее, какъ на общее свойство равновѣсія машинъ, но впрочемъ не приняли за основаніе его теоріи. *Іоаннъ Бернулли* (1667—1648) первый образовалъ начало теоріи равновѣсія, основанной на этой истинѣ, которое и приняло названіе *начала умозрительныхъ скоростей* (начала скоростей стремленія, *principe des vitesse virtuelles*), и которое, говоря словами Лагранжа (*Mécanique Analytique* 2 изданіе 1811 г. § 17 стр. 22) можетъ быть выражено такъ: (*Si un système quelconque de tant de corps ou points que l'on veut, tirés chacun par des puissances quelconques, est en équilibre, et qu'on donne à ce système un petit mouvement quelconque, en vertu du quel chaque point parcourt un espace infiniment petit qui exprimera sa vitesse virtuelle, la somme des puissances multipliées chacune par l'espace que le point ou elle est appliquée, parcourt suivant la direction de cette même puissance, sera toujours ègale à zero, en regardant comme positifs les petits espaces parcourus dans le sens des puissances, et comme négatifs les espaces parcourus dans un sens opposé.*) »*Если какая либо система столькихъ тѣлъ или точекъ, сколько угодно, побуждаемыхъ каждое какою либо силою, находится въ равновѣсіи, и если дадимъ этой системѣ какое либо малое движеніе, которымъ каждая точка пройдетъ безконечно малое пространство, выражающее ея умозрительную скорость, то сумма силъ, относительно умноженныхъ на пространства точками, къ которымъ онѣ приложены, по направленію этихъ силъ проходимыя, будетъ всегда равна нулю, считая за положительныя, малыя пространства, пройденныя*

по направленію силъ и за отрицательныя тѣ, которыя проходятся въ противномъ направленіи.«

Но труды Іоанна Бернулли оставались почти безплодными до послѣднихъ годовъ XVIII столѣтія, когда знаменитый геометръ Лагранжъ въ своей Аналитической Механикѣ принялъ его за основаніе всей Статики и, можно даже сказать всей Динамики, развивъ его во всей общности, и показавъ какъ можно разсматривать вопросы всей науки равновѣсія и движенія, какъ частные случаи этаго главнаго общаго начала. Въ наше время, или лучше, со времени Лагранжа, это начало приличнѣе бы назвать *началомъ возможныхъ перемѣщеній (principe des déplacement possibles)*; потому что, какъ мы увидимъ въ изложеніи самой теоріи, перемѣщенія возможныя въ системѣ, т. е. допускаемыя системою, занимаютъ здѣсь главное мѣсто, что также видно и въ знаменитомъ твореніи Лагранжа — его Аналитической Механикѣ. Но по какой-то странности, которую трудно согласить съ чрезвычайною отчетливостію всѣхъ изслѣдованій этаго великаго геометра, онъ не обратилъ вниманія на многія изъ этихъ перемѣщеній, и отъ того въ начало умозрительныхъ скоростей, имъ возсозданное, вкрался весьма важный недостатокъ, безъ поправки котораго и самое начало дѣлается весьма неполнымъ. Еще страннѣе покажется, что послѣ, какъ появилось въ свѣтъ первое изданіе Аналитической Механики (1788 года), Фурье въ 5-й книжкѣ Журнала Политехнической Школы 1798 года въ Мемуарѣ своемъ о Статикѣ, заключающемъ доказательство начала скоростей стремленія и теорію моментовъ, показалъ тѣ перемѣщенія, на которыя Лагранжъ не обратилъ вни-

манія, и не смотря на то, онъ не воспользовался Мемуаромъ Фурре въ новомъ изданіи своей Механики 1811 года, даже избѣгнулъ разсматриванія ихъ, когда они сами собою ему представились (*Mécanique Analytique* 2 изданіе 1811 года § 19 стр. 25).

И не только у одного Фурре встрѣчаемъ мы такого рода замѣчанія, которыя, такъ сказать, требовали пополненія новой теоріи Лагранжа, или, по крайней мѣрѣ, явно указывали на ея недостатокъ. Такъ напр. еще прежде Мемуара Фурре и даже еще прежде перваго изданія Аналитической Механики, *Карно*, въ своемъ сочиненіи *Essai sur les machines en générale* (1783), говоря, какія условія требуются для приведенія въ движеніе всякую машину, вмѣстѣ съ тѣмъ молча указываетъ и на условія равновѣсія такія, которыя тотчасъ показываютъ недостатокъ Лагранжевой теоріи. Не имѣя подъ руками этаго сочиненія, я выпишу здѣсь изъ втораго его изданія, вышедшаго въ свѣтъ уже въ 1803 году, подъ именемъ: *Principes fondamenteaux de l'équilibre et du mouvement*, въ которомъ если и есть перемѣны противъ перваго, то онѣ заключаются въ развитіи нѣкоторыхъ началъ, въ болѣе ясномъ ихъ изложеніи и въ нѣкоторыхъ прибавленіяхъ, относящихся къ одному только *началу наименьшаго дѣйствія*; прочее же все оставлено совершенно въ прежнемъ видѣ, даже выражено тѣми же самыми словами. Онъ говоритъ: *Une machine quelconque ne peut se mettre en mouvement sans que la somme des produits de chaque des forces qui lui sont appliquèes, par sa vitesse estimèe dans le sens de cette force, ne soit positive et plus grande que zéro, au bout du premièr instant.* (*Princi-

pes fondamenteaux de l'equilibre et du mouvement Paris 1803 *in* 8-o § 222 стр. 201.*)*, *»Никакая машина не можетъ притти въ движенie безъ того, чтобы сумма произведенiй каждой изъ силъ, къ ней приложенныхъ, на ея скорость, считаемую по направленiю этой силы, не была положительною и большею нуля, въ концѣ перваго мгновенiя.«*

Лагранжъ утверждаетъ, что система находится тогда только въ равновѣсiи, когда сумма моментовъ или полный моментъ (который здѣсь имѣетъ собственное свое значенiе, отличное отъ значенiя приписываемаго ему въ Статикѣ, какъ то увидимъ въ изложенiи самой теорiи) равенъ нулю, и что во всѣхъ другихъ случаяхъ, т. е. когда онъ будетъ положительнымъ или отрицательнымъ, система не будетъ находиться въ равновѣсiи. Замѣчанiя геометровъ, о которыхъ я только-что сказалъ, могли бы пополнить недостатокъ Лагранжа; но такъ какъ они не были приложены къ изчисленiямъ, и не введены въ теорiю, то и не сдѣлали въ ней никакого усовершенствованiя. Въ наше только время сдѣлано это усовершенствованiе нашимъ Академикомъ *Г. Остроградскимъ:* онъ доказалъ, что не только тогда система будетъ въ равновѣсiи, когда сумма моментовъ равна нулю, но и тогда, когда она будетъ отрицательною, и это пополненiе начала скоростей стремленiя приложилъ къ вычисленiямъ. Послѣднее, т. е. приложенiе къ вычисленiямъ находится въ его Мемуарѣ 7 Ноября 1834 года, читанномъ въ Императорской Академiи Наукъ.

Этимъ послѣднимъ усовершенствованiемъ окончилось, такъ сказать, то величественное зданiе въ

области Науки, на фронтонѣ котораго Исторія Математики напишетъ, въ память потомству, три эпохи его: Основано Іоанномъ Бернулли въ 1717 году, воздвигнуто Лагранжемъ въ 1788, окончено Остроградскимъ въ 1834. Въ самомъ дѣлѣ, еще за три слишкомъ вѣка до Р. Х. великій умъ Аристотеля первый началъ собирать матеріялы для этаго зданія. Протекло болѣе 20 вѣковъ, новыя открытія, безпрестанно расширяя предѣлы Науки, увеличивали массу матеріяловъ, многіе пытались составить изъ нихъ что-либо цѣлое; но попытки ихъ остались безуспѣшными. Время, изглаживая слѣды этихъ раннихъ опытовъ, еще болѣе нагромождало груды познаній, пока наконецъ въ этихъ нестройныхъ громадахъ начали громко отзываться требованія Науки привести ихъ въ гармоническое цѣлое. Бернулли вполнѣ постигъ эту необходимость, и чувствуя довольно силы, первый рѣшился исполнить требованіе вѣка, и первый положилъ основаніе великаго зданія. Смерть Бернуллія остановила труды его. Прошло послѣ его 70 лѣтъ, наполнившихъ лѣтописи математическія знаменитыми именами, между которыми встрѣчаемъ мы и творца новаго Анализа — Эйлера, всѣ видѣли твердое основаніе положенное Бернулліемъ, и никто не рѣшался (знаменитость именъ не позволяетъ сказать никто не имѣлъ силъ) проникнуть мысли основателя и создать на немъ зданіе, для котораго все уже было приготовлено. Лагранжъ осуществилъ эту идею, и скоро въ области Науки движенія явилось прекрасное, великое зданіе, которое изумило его современниковъ, хотя и не могло увеличить блеска

славы этаго первокласснаго Математика, составленной гигантскими подвигами его въ чистомъ Анализѣ. Какъ искусный зодчій, онъ не оставилъ даже мелкихъ подробностей, тщательно отдѣлалъ всѣ части его работы и, можетъ быть, эта-то самая тщательность утомила геометра, въ то время уже болѣе 25 лѣтъ подвизавшагося на поприщѣ Науки; иначе трудно понять, какъ онъ, съ его проницательностію, почелъ оконченнымъ трудъ свой, когда уже и другіе видѣли, что надобно еще было довершить его. И точно, читая жизнь Лагранжа, мы, кажется, находимъ подтвержденіе этаго предположенія; въ самомъ дѣлѣ, онъ самъ говорилъ, что пославши изъ Берлина въ Парижъ Аналитическую Механику свою для напечатанія, онъ не открывалъ ее послѣ того въ теченіи двухъ лѣтъ. Какъ бы то ни было, но зданіе, имъ воздвигнутое, осталось недоконченнымъ. Многіе въ его время, и послѣ его, видѣли это, даже писали объ этомъ мемуары, и опять прошло полстолѣтія, какъ оно было въ томъ же видѣ, даже до предпрошедшаго года, когда Г. Остроградскій, видя необходимость его въ теоріи равновѣсія, довершилъ это твореніе цѣлаго вѣка. Говоря о Бернуллѣ и Лагранжѣ, я могъ оцѣнивать ихъ достоинства, потому что мнѣніе это, эта оцѣнка не принадлежитъ мнѣ, — она есть голосъ безпристрастнаго потомства; сказавъ же о Г. Остроградскомъ, я только могу показать на услугу, оказанную имъ Наукѣ, какъ на историческій фактъ; оцѣнить его предлежитъ также потомству и современникамъ, купившимъ это право своими учеными подвигами и своею ученою славою; и если я, въ моемъ бѣгломъ историческомъ взглядѣ,

поставилъ одно за другимъ, три имени Бернуллія, Лагранжа и Остроградскаго, то единственно потому, что этаго требовалъ историческій порядокъ, въ какомъ слѣдовали ихъ усовершенствованія, ни сколько не говоря этимъ объ относительномъ достоинствѣ каждаго.

Слышавъ всю теорію равновѣсія, съ послѣднимъ ея усовершенствованіемъ, отъ самого Г. Остроградскаго, мнѣ хотѣлось какъ можно скорѣе передать ее моимъ соотечественникамъ, и сблизить ихъ съ новыми понятіями Русскаго, приобрѣтшаго извѣстность въ ученой Европѣ. Вотъ почему, оставя Исторію, я приступилъ къ изложенію самой Теоріи; а чтобъ вмѣстѣ показать важность и необходимость этаго усовершенствованія, я почелъ за нужное приложить ее къ рѣшенію нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, именно къ равновѣсію жидкихъ тѣлъ вообще и къ опредѣленію фигуры земли.

Не знаю, будетъ ли исполненіе совершенно соотвѣтствовать моему пламенному желанію, представить теорію на высшемъ предѣлѣ ея современнаго усовершенствованія; но долгомъ поставляю прибавить, что если мои читатели найдутъ мое разсужденіе сколько нибудь приближающимся къ цѣли, ему предназначенной, я не имѣю никакого права на ихъ благодарность. Всѣ достоинства моего сочиненія, т. е. самая теорія принадлежитъ моему знаменитому наставнику — Геометру нашего времени, Г. Остроградскому; мнѣ принадлежитъ одно изложеніе, слѣдовательно одни его недостатки. —

§ 1.

Общая теорія равновѣсія.

Излагая общую Теорію равновѣсія, мнѣ надлежало бы начать ее съ равновѣсія одной матеріяльной точки, побуждаемой какими либо силами, при этомъ сказать о составленіи силъ, и разсмотрѣть всѣ частные случаи ихъ дѣйствія. Но, во-первыхъ, со всѣми этими первоначальными свѣдѣніями знакомимся мы на первомъ шагу нашихъ занятій Механикою; во-вторыхъ, они такъ часто встрѣчаются въ продолженіи цѣлаго курса перваго класснаго ученія, каждаго занимающагося этою наукою, что знаніе ихъ составляетъ необходимое условіе не только при чтеніи сочиненія по части Механики, но можно даже сказать, и при чтеніи курса опытной Физики; въ третьихъ, наконецъ, они такъ подробно излагаются во всѣхъ учебныхъ книгахъ Механики, что, занявшись ими, я бы отнялъ только лишь время у моихъ читателей, ни сколько не достигая цѣли, какъ можно скорѣе познакомить ихъ съ самою общею теоріею равновѣсія, какая существовала только по сіе время.

По этому, оставя всѣ эти первоначальныя свѣдѣнія, займемся здѣсь рѣшеніемъ слѣдующаго вопроса, разсматриваемаго во всей его общности: *Дана система произвольно взятаго числа матеріяльныхъ точекъ, побуждаемая данными силами, найти условіе ея равновѣсія.*

Но прежде нежели приступимъ къ рѣшенію, разберемъ подробно самый вопросъ нашъ, чтобы въ заданіи его все было ясно и опредѣлительно, именно, объяснимъ, что разумѣемъ мы подъ *данною системою*, т. е. какимъ образомъ можемъ мы дать себѣ систему или, другими словами, что должно намъ знать въ системѣ, чтобъ мы были въ состояніи опредѣлить условія ея равновѣсія. Подробное разсмотрѣніе этаго, кажется намъ тѣмъ необходимѣе, что мы нигдѣ не встрѣчаемъ его, выраженнымъ съ надлежащею *ясностію*.

Въ каждой данной системѣ матеріяльныхъ точекъ, мы должны знать необходимо два елемента: 1) ихъ матеріяльность, или то, что мы называемъ ихъ *массою* и 2) связь, между ними находящуюся, условія, соединяющія ихъ между собою, т. е. именно то, что заставляетъ насъ *совокупность* этихъ точекъ называть *системою*.

Понятіе о массѣ принадлежитъ къ тѣмъ самымъ первымъ необходимымъ познаніямъ, которыя, какъ мы уже сказали, непремѣнно предполагаются во всякомъ занимающемся Механикою; но во многихъ курсахъ Механики, и я, кажется немного ошибусь, сказавъ: во *всѣхъ* учебныхъ книгахъ этой науки, мы встрѣчаемъ такое опредѣленіе массы, которое вовсе не дастъ возможности подчинить ее точнымъ изстро-

гимъ законамъ Анализа, и которое, можно сказать болѣе объясняя нежели опредѣляя это понятіе, дѣлаетъ его нѣкоторымъ образомъ ощутительнымъ, а потому и полезно въ началахъ Опытной Физики, но не въ Аналитической Механикѣ. Такъ напр. и у Пуассона, въ извѣстномъ сочиненіи его Traité de Mécanique, находимъ мы подобное опредѣленіе; онъ говоритъ: масса есть количество матеріи (Traité de Mécanique par Poisson 1833 г. 2-е изданіе 1 стр.)

Вотъ что особенно заставляетъ меня заняться опредѣленіемъ массы, хотя впрочемъ, входя непремѣнно при опредѣленіи условій равновѣсія каждой системы матеріяльныхъ точекъ, понятіе о ней, есть какъ бы посторонній предметъ для самой теоріи равновѣсія.

Если какое нибудь тѣло (*) находится въ покоѣ, то мы знаемъ, что по закону *неподвижности* (закону недѣятельности loi d'inértie), оно непремѣнно до тѣхъ поръ останется въ этомъ состояніи, пока внѣшнія силы, дѣйствіемъ своимъ, не заставятъ перемѣнить его на движеніе. Но этотъ переходъ не каждою силою можетъ быть произведенъ одинаково, или, лучше, одна и таже сила, дѣйствуя на различныя тѣла, произведетъ различныя движенія, т. е. движенія съ различною скоростію. Слѣдовательно здѣсь сила встрѣчаетъ въ тѣлѣ препятствіе (удаляя совершенно постороннія препятствія: треніе, сопротивленіе срединъ и т. п.); причину этого препятствія, встрѣчае-

(*) Я беру здѣсь тѣло вмѣсто одной матеріяльной точки, для яснѣйшаго представленія; а такъ какъ всякое тѣло есть совокупность матеріяльныхъ точекъ, со все то, что мы скажемъ объ немъ, будетъ относиться и къ каждой точкѣ въ отдѣльности.

маго силами во всѣхъ тѣлахъ, въ различной только степени, назовемъ, мы *массою*: она есть непремѣнная принадлежность каждаго тѣла, и составляетъ отличительный характеръ его матеріяльности, разсматривая его только лишь какъ предметъ, подлежащій дѣйствію силъ, т. е. разсматривая его въ томъ только отношеніи, въ какомъ онъ долженъ входить въ Аналитическую механику. Мы не имѣемъ безусловнаго (абсолютнаго) понятія ни о сущности, ни о величинѣ массы каждаго тѣла, точно, также какъ о сущности и величинѣ силъ, впрочемъ въ Механикѣ мы и не нуждаемся въ немъ; намъ довольно только знать относительную величину массы каждаго тѣла. Опытъ есть самый естественный путь, могущій ознакомить насъ съ этою величиною, именно, стоитъ только каждое тѣло подвергать дѣйствію одной и той же силы, и замѣчать величину препятствія, тѣломъ этой силѣ противополагаемаго; потомъ означить его въ какомъ либо одномъ тѣлѣ единицею, тогда во всѣхъ другихъ оно и выразится числами, которыя и покажутъ относительную величину ихъ массъ. Что же мы примемъ за мѣру этого препятствія? Разумѣется, различіе слѣдствій при дѣйствіи внѣшнихъ силъ на тѣла замѣчаемыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, если какою либо силою (напр. пружиною) мы, заставивъ тѣло притти въ движеніе, замѣтимъ пройденное имъ пространство, потомъ сдѣлаемъ тоже съ другимъ тѣломъ и увидимъ, что оно прошло пространство меньше перваго (при однихъ и тѣхъ же обстоятельствахъ и въ одну и ту же единицу времени), то естественно сдѣлаемъ тотчасъ прямое заключеніе, что препятствіе, противополагаемое дѣй-

ствію силы первымъ тѣломъ, менѣе нежели тоже препятствіе во второмъ тѣлѣ, а слѣдовательно и масса перваго тѣла менѣе массы втораго. Назовемъ массу перваго M, втораго M', пространство, пройденное первымъ тѣломъ E, вторымъ E', тогда пропорція

$$M : M' = E' : E,$$

въ которой массу M перваго тѣла, примемъ мы за единицу мѣры всѣхъ прочихъ массъ, доставитъ намъ $M' = M\frac{E}{E'} = \frac{E}{E'}$ т. е. покажетъ, что масса всякаго тѣла равна массѣ тѣла принятой за единицу, помноженной на обратное отношеніе между пространствами, пройденными нашимъ тѣломъ и тѣмъ, котораго масса принята за единицу мѣры всѣхъ прочихъ, или величина массы равна обратному отношенію пространствъ, пройденныхъ тѣломъ, котораго масса ищется, и другимъ, котораго масса принимается за единицу мѣры массъ.

Теперь займемся другимъ елементомъ системы матеріяльныхъ точекъ — самою системою. Представимъ себѣ совокупность точекъ, свободную отъ всякаго дѣйствія силъ: еслибы можно было перемѣстить какою либо силою, напримѣръ, рукою, каждую точку во всѣ стороны всячески, какъ только можемъ себѣ представить, независимо отъ всѣхъ другихъ точекъ, то подобное соединеніе могло бы быть разсматриваемо какъ собраніе отдѣльныхъ точекъ, и къ каждой изъ нихъ могли бы мы приложить все то, что знаемъ относительно равновѣсія одной точки. Чтобъ это собраніе отдѣльныхъ точекъ приняло названіе системы, должна между ними находиться

какая либо связь (условіе, полагающее зависимость однѣхъ отъ другихъ), которая во всѣхъ положеніяхъ системы должна оставаться неизмѣнною, и которая по этому, при дѣйствіи внѣшнихъ силъ, можетъ позволить точкамъ ее, составляющимъ, всѣ перемѣщенія, неразрушающія этой связи, и никакъ не должна допускать прочихъ. Изъ этаго необходимо слѣдуетъ предположеніе, что точки системы не могутъ перемѣщаться независимо однѣ отъ другихъ, и что извѣстныя перемѣщенія не возможны, по причинѣ связи, которой подчинена система. Слѣдовательно знаніе всякой системы точекъ приводится къ знанію перемѣщеній допускаемыхъ системою, которыя мы назовемъ *возможными перемѣщеніями*, и тѣхъ, какія не могутъ быть ею допущены *невозможныхъ перемѣщеній.*

Разовьемъ и объяснимъ все, что мы сказали частными примѣрами; для этого разсмотримъ сначала двѣ точки m и m', соединенныя неизмѣняемымъ образомъ, т. е. долженствующія всегда сохранять между собою одно и тоже разстояніе. Ясно, что для такой системы всѣ тѣ перемѣщенія будутъ возможны, въ которыхъ, при новомъ положеніи, разстояніе останется тоже, какъ и въ положеніи первоначальномъ; всѣ же тѣ, при которыхъ бы это разстояніе увеличилось или уменьшилось, невозможны.

Если бы точки m и m', вмѣсто того, чтобъ быть подчиненными условію, сохранять тоже разстояніе, были связаны между собою гибкою, но неразтяжимою нитью, очевидно, что тогда можно бы было перемѣстить систему такъ, чтобы при новомъ ея положеніи, первоначальное разстояніе точекъ или

оставалось бы тоже или уменьшилось бы; но тѣ перемѣщенія, при которыхъ это разстояніе должно бы было увеличиться, невозможны.

Покажемъ теперь, какъ ввести въ вычисленіе возможныя и невозможныя перемѣщенія системы. Во всякомъ перемѣщеніи какой либо точки, должно разсматривать его *количество и направленіе.* Количествомъ перемѣщенія называется разстояніе отъ перваго положенія точки до втораго; направленіе дается обыкновенно углами, какіе это разстояніе составляетъ съ осями координатъ, къ которымъ относимъ систему. Но лучше согласиться и здѣсь поступать также, какъ мы дѣлаемъ въ теоріи силъ, гдѣ, вмѣсто того чтобъ, разсматривать величину и направленіе силы, мы разсматриваемъ три проекціи ея на оси координатъ, что требуетъ трехъ данныхъ. И здѣсь точно также введемъ вмѣсто количества и направленія перемѣщенія, три проекціи его на оси координатъ, такъ что всякое перемѣщеніе будетъ опредѣлено тремя его проекціями на трехъ осяхъ координатъ.

Принявъ это, пусть будутъ m, m', m''.... массы, составляющія систему; x, y, z координаты опредѣляющія положеніе массы m; x', y', z' координаты массы m'; x'', y'', z'' координаты массы m'' и такъ далѣе. Перемѣстимъ или представимъ, что мы перемѣстили систему изъ ея первоначальнаго положенія, и означимъ чрезъ dx, dy, dz проекціи перемѣщенія точки m; чрезъ dx', dy', dz' проекціи перемѣщенія точки m'; чрезъ dx'', dy'', dz'' проекціи перемѣщенія точки m'' и такъ далѣе. Система въ новомъ ея дѣйствительномъ или предполагаемомъ по-

ложенія будетъ опредѣлена координатами $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$; $x'+dx'$, $y'+dy'$, $z'+dz'$; $x''+dx''$, $y''+dy''$ $z''+dz''$ и такъ далѣе; изъ которыхъ три первыя будутъ принадлежать точкѣ m, три вторыя точкѣ m', третія точкѣ m'' и пр. Теперь надобно изъ сравненія этихъ двухъ относительныхъ положеній системы, различить тѣ изъ количествъ dx, dy, dz; dx', dy', dz'; dx'', dy'', dz'' и пр. которыя принадлежатъ возможнымъ перемѣщеніямъ, отъ тѣхъ, которыя принадлежатъ невозможнымъ.

Возвратимся къ нашимъ двумъ точкамъ m, и m', соединеннымъ между собою неизмѣняемымъ образомъ, для которыхъ x, y, z, суть координаты точки m; x', y', z' координаты точки m'. Разстояніе между этими двумя точками выразится чрезъ

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

которое мы и изобразимъ чрезъ r. Если мы будемъ разсматривать двѣ точки въ какомъ либо новомъ положеніи, то координаты x, y, z; x', y', z' увеличатся ихъ дифференціалами, а слѣдовательно и разстояніе r увеличится его дифференціаломъ и сдѣлается $r+dr$. Количество dr можетъ быть положительное, равно нулю, или отрицательное: въ первомъ случаѣ первоначальное бы разстояніе увеличилось; во второмъ оно осталось бы тѣмъ же, и оно уменьшилось бы въ третьемъ. Разсматривая одни только возможныя перемѣщенія системы, увидимъ, что для нихъ разстояніе r должно оставаться однимъ и тѣмъ же, слѣдовательно должно быть $dr=0$ или

$$(x'-x)(dx'-dx)+(y'-y)(dy'-dy)+(z'-z)(dz'-dz)=0$$

Равенство это принадлежитъ единственно проекціямъ

возможныхъ перемѣщеній, такъ что всѣ перемѣщенія, которыхъ проекціи удовлетворяютъ этому уравненію, возможны; а всѣ тѣ, которыхъ проекціи не удовлетворяютъ ему, не возможны. Можно разсматривать ихъ въ общей теоріи какой либо системы, но произвести нельзя на самомъ дѣлѣ въ этой системѣ.

Еслибъ вмѣсто непремѣняемаго соединенія, мы разсматривали гибкую нить, тогда разстояніе r могло бы и оставаться тѣмъ же и уменьшаться; поэтому здѣсь возможныя перемѣщенія были бы не только тѣ, которыя бы давали $dr=o$, но также и всѣ тѣ, для которыхъ dr было бы отрицательнымъ; такъ что для этихъ перемѣщеній мы бы имѣли:

$$(x'-x)\ (dx'-dx)+(y'-y)\ (dy'-dy)+(z'-z)\ (dz'-dz) < o$$

гдѣ неравенство не исключаетъ равенства; между тѣмъ какъ всѣ перемѣщенія, которыя бы давали дифференціалу:

$$(x'-x)(\partial x'-\partial x)+(y'-y)(\partial y'-\partial y)+(z'-z)(\partial z'-\partial z)$$

величину положительную, были бы невозможны.

Разсмотримъ еще другой частный случай, напримѣръ такой, гдѣ были бы 3 точки m, m' и m'', изъ которыхъ первая и вторая соединены непремѣняемымъ образомъ, вторая и третія связаны гибкою (натянутою) нитью и наконецъ, еще третія, кромѣ того опирается на неподвижную поверхность. Изображая чрезъ x, y, z, координаты точки m; чрезъ x', y', z' точки m', чрезъ x'', y'', z'' точки m'', и чрезъ ∂x, ∂y, ∂z проекціи перемѣщенія точки m, чрезъ $\partial x'$ $\partial y'$, $\partial z'$ проекціи перемѣщенія точки m', чрезъ $\partial x''$, $\partial y''$, $\partial z''$ точки m''; легко найдемъ, послѣ того, что было уже сказано, что проекціи возможныхъ перемѣщеній должны удовлетворять такимъ условіямъ

$$(x'-x)(\partial x'-\partial x)+(y'-y)(\partial y'-\partial y)+(z'-z)(\partial z'-\partial z)=0$$
$$(x''-x')(\partial x''-\partial x')+(y''-y')(\partial y''-\partial y')+(z''-z')(\partial z''-\partial z')<0$$

въ которыхъ неравенство не исключаетъ равенства. Но эти условія не выразили еще всѣхъ требованій нашего вопроса; къ нимъ еще надобно прибавить такія, которыя бы показали, что третія точка не можетъ проникать во внутренность твердаго тѣла, на поверхность котораго она опирается. Для найденія условій, удовлетворяющихъ этому требованію, обозначимъ чрезъ

$$\varphi(l, m, n)=L=0$$

уравненіе поверхности твердаго тѣла; гдѣ l, m, n суть координаты этой поверхности. Самая поверхность $L=0$, раздѣлитъ пространство на двѣ части такія, что взявъ для l, m, n координаты какой либо точки, находящейся въ одной изъ этихъ частей, найдемъ $L>0$, а подставляя въ l, m, n координаты какой либо точки, помѣщенной въ другой части пространства, получимъ $L<0$; такъ что по этому $L=0$ будетъ относиться къ предѣлу каждой изъ этихъ частей. Этотъ предѣлъ и есть данная поверхность: одна изъ частей $L>0$, $L<0$, изобразитъ часть пространства внутри поверхности находящуюся, другая внѣ оной съ той же самой стороны ея, съ которой находится и данная точка m''; но мы не знаемъ, какое именно неравенство относится къ той или другой части. Очевидно, что точка m'' никогда не можетъ проникнуть въ одну изъ этихъ частей пространства, остается знать въ которую именно; предположимъ напр. что въ ту, для которой $L<0$. Поэтому точка m'' можетъ перемѣщаться на самой поверхности и въ части пространства, для которой

$L > 0$. Такъ какъ точка m'' въ первоначальномъ ея положеніи находится на поверхности, то будетъ

$$\varphi(x'', y'', z'') = 0$$

во второмъ положеніи, координаты ея будутъ $x'' + \partial x''$, $y'' + \partial y''$, $z'' + \partial z''$ и предъидущая функція сдѣлается для этаго положенія такою:

$$\varphi(x'' + \partial x'', y'' + \partial y'', z'' + \partial z'')$$

Разсматривая одни только возможныя перемѣщенія, мы увидимъ, что эта послѣдняя функція будетъ равна нулю или будетъ положительною: равна нулю, когда точка m'' перемѣстится на самой поверхности; положительною когда точка m'' отдѣлится отъ поверхности, не проникая внутръ ея, такъ что для возможныхъ перемѣщеній получимъ:

$$\varphi(x'' + \partial x'', y'' + \partial y'', z'' + \partial z'') > 0$$

неравенство неисключающее равенства. Но такъ какъ:

$$\varphi(x'' + \partial x'', y'' + \partial y'', z'' + \partial z'') = \varphi(x'', y'', z'') + d\varphi(x'', y'', z'')$$

и такъ какъ

$$\varphi(x'', y'', z'') = 0,$$

то предъидущее условіе приведется къ такому:

$$\partial\varphi(x'', y'', z'') > 0.$$

Такимъ образомъ возможныя перемѣщенія разсматриваемой нами системы, будутъ опредѣлены чрезъ:

$$(x' - x)(\partial x' - \partial x) + (y' - y)(\partial y' - \partial y) + (z' - z)(\partial z' - \partial z) = 0$$

$$(x'' - x')(\partial x'' - \partial x') + (y'' - y')(\partial y'' - \partial y') + (z'' - z')(\partial z'' - \partial z') < 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x''}\partial x'' + \frac{\partial\varphi}{\partial y''}\partial y'' + \frac{\partial\varphi}{\partial z''}\partial z'' > 0,$$

гдѣ неравенства неисключаютъ равенствъ. Всѣ перемѣщенія, неудовлетворяющія этимъ условіямъ, не-

возможны, между тѣмъ какъ всѣ тѣ, которыя имъ удовлетворяютъ, возможны и могутъ быть произведены на самомъ дѣлѣ.

Обратимся теперь къ нашимъ общимъ понятіямъ, чтобъ достигнуть рѣшенія предложеннаго вопроса, разсматриваемаго во всей его общности. Мы видѣли на частныхъ примѣрахъ, какимъ образомъ Математическій Анализъ, различаетъ возможныя перемѣщенія отъ невозможныхъ: первыя будутъ всегда даны помощію уравненій или неравенствъ между проекціями x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; .... точекъ данной системы. Эти уравненія или неравенства удовлетворяются проекціями однихъ возможныхъ перемѣщеній, поэтому всѣ прочія перемѣщенія, которыхъ проекціи не могутъ имъ удовлетворить, невозможны. Общихъ же началъ для отличенія возможныхъ перемѣщеній отъ невозможныхъ, во всѣхъ вообще системахъ, дать нельзя, потому что это различіе зависитъ отъ свойства каждой частной предлагаемой системы, составляетъ отличительный храктеръ ея, и слѣдовательно, съ измѣненіемъ системы измѣняется; но стоитъ только положить это различіе (что всегда удобоисполнимо въ частныхъ заданіяхъ системы и безъ чего, лучше сказать, система не можетъ быть дана) и мы уже всегда можемъ найти общія условія равновѣсія системы правильнымъ, прямымъ и всегда одинакимъ путемъ.

И такъ предположимъ, что всѣ уравненія или неравенства, опредѣляющія возможныя перемѣщенія намъ извѣстны. Эти уравненія или неравенства всегда бываютъ линейнаго вида, такого, какъ напр:

$$a\partial x + b\partial y + c\partial z + a'\partial x' + b'\partial y' + c'\partial z' + a''\partial x'' + b''\partial y'' + c''\partial z'' + \&\ldots$$

Каждая изъ функцій, состоящихъ изъ этихъ линейныхъ выраженій, сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ для всѣхъ возможныхъ перемѣщеній, и перемѣняетъ его только при переходѣ отъ перемѣщеній возможныхъ къ невозможнымъ. Для того, чтобъ менѣе писать, означимъ въ общемъ положеніи чрезъ ∂L, ∂M, ∂N линейныя функціи, о которыхъ мы сейчасъ говорили; то количества ∂L, ∂M, ∂N для всѣхъ возможныхъ перемѣщеній сохранятъ всегда одинъ и тотъ же знакъ и могутъ сдѣлаться равными нулю. Мы не хотимъ сказать, что всѣ эти количества будутъ съ однимъ и тѣмъ же знакомъ для всѣхъ возможныхъ перемѣщеній; но что ни одно изъ нихъ не перемѣнитъ знака, иначе какъ только лишь при переходѣ отъ возможныхъ перемѣщеній къ невозможнымъ. Такъ напр: если количество ∂L есть количество положительное для какого либо одного возможнаго перемѣщенія, оно можетъ быть только положительнымъ, или равнымъ нулю, для всякаго другаго возможнаго перемѣщенія; отрицательнымъ же можетъ сдѣлаться только лишь для перемѣщеній невозможныхъ.

Принявъ все это, приложимъ силы къ системѣ и разсмотримъ условія равновѣсія, имѣя уже теперь все, что нужно имѣть для рѣшенія нашего вопроса. Весьма кажется ясно, что для равновѣсія силъ необходимо, чтобъ онѣ стремились дать системѣ тѣ перемѣщенія, какія она не можетъ принять. Такъ что во время равновѣсія, силы вовсе не будутъ стремиться произвести тѣхъ перемѣщеній, какія возможны для системы, и на оборотъ, тѣ перемѣщенія, какія стремятся силы сообщить системѣ, не

могутъ быть допущены ею. Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ силы могли сообщить какія либо изъ перемѣщеній, которыя бы могла принять система, тогда она и приняла бы ихъ, а слѣдовательно тогда и не было бы равновѣсія.

Отсюда самымъ естественнымъ образомъ проистекаютъ условія равновѣсія, — для него необходимо: *чтобъ перемѣщенія, которыя стремятся дать силы, были именно тѣ, которыя не могутъ быть приняты системою, и на оборотъ, чтобъ перемѣщенія, которыя можетъ принять система, были тѣ самыя, которыхъ не могутъ произвести силы.* По этому самое простѣйшее выраженіе условій равновѣсія будетъ таково: *равновѣсіе всякой системы требуетъ, чтобъ силы были не въ состояніи произвести ни одного перемѣщенія, которое бы могла принять система.* Но такъ какъ мы уже изъ предъидущаго знаемъ, какимъ образомъ во всякой системѣ опредѣлить и передать Анализу перемѣщенія для нее возможныя, то намъ остается только дополнить, что эти самыя перемѣщенія не могутъ быть произведены данными силами; — и это самое выразить языкомъ математическимъ. До сихъ поръ мы разсматривали одну только систему точекъ, совершенно независимую отъ внѣшняго вліянія, — отъ силъ на нее дѣйствующихъ, и только лишь въ этой системѣ полагали различіе между возможными и невозможными перемѣщеніями; теперь введя въ разсмотрѣніе данныя силы, найдемъ общій признакъ по которому бы мы различали перемѣщенія, могущія быть произведены силами, отъ тѣхъ, которыя ими произведены быть не могутъ.

Для достиженія этой цѣли, введемъ сюда нѣкоторыя первоначальныя опредѣленія: для этаго разсмотримъ какую нибудь точку m въ пространствѣ, на которую дѣйствуетъ сила P, — для насъ все равно, будетъ ли эта точка совершенно отдѣльная, или она составляетъ часть системы. Представимъ какое либо перемѣщеніе этой точки m, то произведеніе силы P на проекцію перемѣщенія, проектированнаго на направленіе этой силы P, есть то, что мы называемъ *моментомъ этой силы.* Такимъ образомъ если назовемъ буквою s, количество перемѣщенія точки m, буквою ω уголъ, составляемый направленіемъ перемѣщенія s съ направленіемъ силы P, то $Ps\cos.\omega$ будетъ моментомъ силы P. Обозначимъ чрезъ X, Y, Z слагающія силы P, параллельныя осямъ координатъ, и чрезъ dx, dy, dz проекціи перемѣщенія s на тѣ же оси, то очевидно будемъ имѣть:

$$\cos\omega = \frac{X\partial x + Y\partial y + Z\partial z}{Ps}$$

откуда $$Ps\cos.\omega = X\partial x + Y\partial y + Z\partial z.$$

Такимъ образомъ моментъ силъ можетъ быть выраженъ помощію трехчленнаго количества $X\partial x + Y\partial y + Z\partial z$, — это-то выраженіе его и употребляютъ всего чаще.

Въ Статикѣ слово моментъ употребляютъ въ другомъ значеніи, — оно означаетъ тамъ произведеніе силы на разстояніе отъ какой либо плоскости, линіи или точки. Во всемъ же этомъ разсужденіи слову *моментъ*, мы не припишемъ никакого другаго значенія, кромѣ произведенія силы на проекцію перемѣщенія, проектированнаго на ея направленіе.

Теперь если разсмотримъ столько точекъ, сколько угодно, такихъ, чтобъ къ каждой точкѣ была приложена сила, если возьмемъ моментъ каждой силы, т. е. если составимъ произведеніе изъ каждой силы на проекцію какого либо перемѣщенія той точки, къ которой эта сила приложена, и сложимъ вмѣстѣ всѣ эти произведенія, тогда получимъ то, что называется *моментомъ системы* или *полнымъ моментомъ* (moment totale). (*) Очевидно, что будетъ столько такихъ моментовъ, сколько можно разсматривать перемѣщеній, слѣдовательно безчисленное множество (принимая здѣсь всѣ перемѣщенія, входящія въ разсмотрѣніе, какъ допускаемыя системою, такъ и недопускаемыя); и если полный моментъ соотвѣтствуетъ возможному перемѣщенію системы, то его можно назвать, и мы назовемъ *полнымъ моментомъ возможнымъ* или, просто, *моментомъ возможнымъ*; еслиже онъ соотвѣтствуетъ невозможному перемѣщенію, то означимъ его именемъ *невозможнаго момента.*

Принявъ эти опредѣленія, мы выведенное нами условіе равновѣсія, такое, *чтобъ силы были не въ состояніи произвести ни одного перемѣщенія, которое бы могла принять система*, выразимъ другими словами, сказавъ, что *необходимое требованіе равновѣсія системы состоитъ въ томъ, чтобъ для нее не существовало возможнаго момента.* И такъ какъ мы уже умѣемъ выразить всякій вообще моментъ системы помощію Анализа, именно помощію трехчленнаго выраженія $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$, то остается только выразить Аналитически различіе между

(*) Его же называютъ и *суммою моментовъ.*

моментами возможными и невозможными. Докажемъ для этого слѣдующую, весьма важную теорему, которая послужитъ основаніемъ всей нашей теоріи, именно, что силы во всякой системѣ могутъ произвести только тѣ перемѣщенія, для которыхъ полный моментъ есть положительный; онѣ никогда не могутъ произвести ни одного перемѣщенія, для котораго моментъ былъ бы равенъ нулю или бы былъ отрицательный. Или иначе: во всякой системѣ при дѣйствіи всякихъ силъ, моментъ возможный долженъ быть величиною положительною, моментъ невозможный долженъ быть равенъ нулю илидолженъ быть величиною отрицательною. Предложеніе это доказано во многихъ сочиненіяхъ; мы возьмемъ доказательство Лагранжа, присоединивъ къ нему то, что ускользнуло отъ вниманія этаго знаменитаго геометра. Но чтобъ не прервать нить нашихъ понятій, относительно самыхъ условій равновѣсія, то прежде доказательства этаго предложенія прибавимъ еще нѣсколько словъ, принявъ его какъ бы уже доказаннымъ. Такъ какъ мы сказали, что при равновѣсіи, возможнаго момента существовать не должно, а только лишь одинъ невозможный и такъ какъ наша теорема показываетъ, что возможный моментъ для всякой системы долженъ быть положительнымъ, то очевидно, что *для равновѣсія необходимо нужно, чтобъ моментъ былъ или равенъ нулю, или былъ бы отрицательнымъ, но никогда не долженъ быть положительнымъ.*

Чтобъ представить наше доказательство со всею возможною ясностію, приложимъ его сначала къ частному примѣру. Разсмотримъ для этаго двѣ точ-

ки m и m', связанныя между собою гибкою нитью, на которыя дѣйствуютъ силы противоположныя, равныя и стремящіяся увеличить разстояніе mm', Представимъ себѣ, что на направленіи силы, приложенной къ точкѣ m, находится неподвижный блокъ a, и другой такой же блокъ d по направленію силы, приложенной къ точкѣ m'; потомъ прикрѣпимъ къ точкѣ m' блокъ c, способный раздѣлять всѣ движенія этой точки m', и наконецъ привязавъ въ точкѣ m нить, обовьемъ ею всю систему такъ, чтобъ она, пойдя отъ точки m чрезъ первый неподвижный блокъ a, прошла бы отъ него посредствомъ отводнаго блока b (если необходимъ этотъ послѣдній) къ подвижному блоку c, и отъ этаго къ неподвижному d. Когда веревка перейдетъ чрезъ послѣдній блокъ d, повѣсимъ на концѣ ея грузъ f, равный, каждой изъ приложенныхъ къ системѣ силъ. Ясно, что можно вовсе не разсматривать этихъ двухъ силъ, потому что онѣ замѣнены совершенно повѣшеннымъ нами грузомъ; и такъ мы теперь будемъ разсматривать одинъ этотъ грузъ, какъ единственный движитель точекъ нашей системы. Здѣсь очевидно, что этотъ грузъ не можетъ произвести въ системѣ ни одного перемѣщенія, при которомъ бы онъ поднялся или остался бы на своемъ мѣстѣ; онъ можетъ произвести только тѣ, которыя заставятъ его опуститься, такъ, что ежели такихъ перемѣщеній не находится, система останется въ равновѣсіи. Но ясно можно видѣть, что въ частномъ случаѣ, нами разсматриваемомъ, нѣтъ ни одного перемѣщенія, которое бы заставило низойти грузъ. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что точка m' неподвижна, и

будемъ перемѣщать точку m: если точка m при этихъ перемѣщеніяхъ приблизится къ точкѣ m', тогда она удалится отъ неподвижнаго блока a, ей соотвѣтствующаго, поэтому часть веревки между точкою m и блокомъ a, удлиннится, части веревки между другими блоками длины своей не перемѣнятъ, а такъ какъ и длина всей веревки неизмѣнна, то часть, находящаяся между послѣднимъ неподвижнымъ блокомъ d и подвижнымъ грузомъ f укоротится, что и заставитъ грузъ подняться, и перемѣщеніе, о которомъ мы говоримъ, будетъ невозможно. Если бы мы точку m перемѣстили такъ, чтобъ разстояніе mm' не измѣнилось, тогда бы и разстояніе ея отъ неподвижнаго блока a, также только бы могло увеличиться (въ этомъ случаѣ точка m только бы могла подниматься или опускаться, описывая дугу круга около точки m' радіусомъ mm') и грузъ также могъ бы только подняться, поэтому опять это перемѣщеніе невозможно. Тоже бы самое произошло, еслибы мы точку m сдѣлали неподвижною, а m' перемѣщали бы,—и такъ ни одно перемѣщеніе, при которомъ одна только которая либо изъ точекъ перемѣняетъ положеніе, не имѣетъ мѣста. Перемѣстимъ обѣ точки вдругъ, напримѣръ, въ направленіи отъ m' къ m; при этихъ перемѣщеніяхъ разстояніе между двумя точками можетъ уменьшиться или остаться тѣмъ же: еслибъ оно уменьшилось, грузъ необходимо долженъ бы былъ подняться; еслибъ оно осталось неизмѣннымъ, грузъ остался бы на своемъ мѣстѣ, а слѣдовательно силы не могли бы сдѣлать и этихъ перемѣщеній; такое же заключеніе сдѣлали бы мы и при всѣхъ другихъ перемѣщені-

яхъ. Изъ этаго видно, что силы не могутъ произвести ни одного перемѣщенія, допускаемаго системою, слѣдовательно система будетъ находиться въ равновѣсіи. Еслибъ мы представили себѣ перемѣщеніе невозможное, такое напримѣръ, чтобъ точка m' шла къ неподвижному блоку d, ей соотвѣтствующему, и точка m къ своему блоку a, тогда уже весьма ясно, что грузъ опустится; но перемѣщеніе, которое мы предположили, невозможно, по причинѣ нерастяжимости нити.

Можно бы сдѣлать возраженіе противъ нашего доказательства такое, что мы не разсматривали вдругъ какого либо возможнаго перемѣщенія всей системы, но только лишь частныя перемѣщенія точекъ ея; но такое возраженіе легко опровергнуть слѣдующимъ разсужденіемъ, весьма полезнымъ въ теоріи моментовъ.

Если перемѣщая систему постепенно многими и различными образами, мы приведемъ ее въ такое положеніе, въ которое могли бы привести вдругъ прямо, то моментъ относительно къ этому послѣднему, непосредственно прямому перемѣщенію, равенъ суммѣ моментовъ, относящихся къ прежнимъ постепеннымъ перемѣщеніямъ.

Доказать это весьма легко: въ самомъ дѣлѣ означимъ чрезъ $S_1, S_2, S_3, \ldots$ послѣдовательныя перемѣщенія точки m; чрезъ $S'_1, S'_2, S'_3, \ldots$ послѣдовательныя перемѣщенія точки m'; чрезъ $S''_1, S''_2, S''_3, \ldots$ точки m'' и такъ далѣе. Потомъ означимъ чрезъ $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots; \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \ldots; \omega''_1, \omega''_2, \omega''_3, \ldots;$ и такъ далѣе, углы, составляемые относительно этими перемѣщеніями съ силами, приложенными къ

точкамъ, имъ соотвѣтствующимъ, то сумма моментовъ для этихъ перемѣщеній будетъ:

$$P(S_1 \cos.\omega_1 + S_2 \cos.\omega_2 + S_3 \cos.\omega_3 + \cdots)$$
$$+ P'(S'_1 \cos.\omega'_1 + S'_2 \cos.\omega'_2 + S'_3 \cos.\omega'_3 + \cdots)$$
$$+ P''(S''_1 \cos.\omega''_1 + S''_2 \cos.\omega''_2 + S''_3 \cos.\omega''_3 + \cdots)$$
$$+ \& \cdots\cdots$$

Но изъ теоріи многоугольниковъ извѣстно, что если назовемъ чрезъ S, S', S'', $\cdots$ разстоянія отъ первоначальныхъ положеній точекъ m, m', m'', $\cdots$ до ихъ послѣднихъ положеній, и обозначимъ въ тоже время буквами ω, ω', ω'', $\cdots$ углы, составляемые этими разстояніями съ силами, приложенными къ точкамъ, имъ соотвѣтствующимъ то получимъ:

$$S\cos.\omega = S_1 \cos.\omega_1 + S_2 \cos.\omega_2 + S_3 \cos.\omega_3 + \cdots$$
$$S'\cos.\omega' = S'_1 \cos.\omega'_1 + S'_2 \cos.\omega'_2 + S'_3 \cos.\omega'_3 + \cdots$$
$$S''\cos.\omega'' = S''_1 \cos.\omega''_1 + S''_2 \cos.\omega''_2 + S''_3 \cos.\omega''_3 + \cdots$$
$$\& \cdots\cdots$$

такъ, что сумма предъидущихъ моментовъ приведется къ

$$PS\cos.\omega + P'S'\cos.\omega' + P''S''\cos.\omega'' + \cdots$$

что и доказываетъ нашу теорему.

Послѣ этаго уже слегка только разсмотрѣвъ перемѣщенія, какія мы сдѣлали съ частною системою двухъ точекъ m и m' видно, что помощію этихъ частныхъ перемѣщеній можно сдѣлать какія бы ни было вообще перемѣщенія, а потому если мы нашли, что для частныхъ перемѣщеній моменты равны нулю или суть величины отрицательныя, то и для какихъ либо вообще перемѣщеній, тоже моментъ будетъ или равенъ нулю или будетъ отрицательнымъ.

Мы разсматривали частный случай системы

или частную систему, только для того, чтобъ легче понять всякую систему вообще, теперь приступимъ къ этой послѣдней.

Пусть у насъ будетъ столько точекъ $m, m', m'', \cdots$ сколько угодно, изъ которыхъ на каждую дѣйствуетъ данная сила. Каковы бы ни были эти силы, всегда можно принимать ихъ соизмѣримыми, бравъ, если бы это было нужно, за ихъ общую мѣру, силу безконечно малую. Означимъ буквою Q эту общую мѣру всѣхъ силъ, и предположимъ, что сила P, приложенная къ точкѣ m, равна nQ; сила P′, приложенная къ точкѣ m', равна n'Q; сила P″, приложенная къ точкѣ m'', равна n''Q и такъ далѣе. Очевидно, что можно бы было произвести такое же дѣйствіе, какое производятъ всѣ эти силы, однимъ грузомъ Q, привязаннымъ къ концу веревки, обвивающей всю систему, помощію *полиспастовъ* или *шкифовъ*, прикрѣпленныхъ ко всѣмъ ея точкамъ, и расположенныхъ такимъ образомъ, чтобъ число веревокъ въ шкифѣ, приложенномъ къ каждой точкѣ, было равно количеству $n, n', n'', \cdots$ соотвѣтствующему той точкѣ, такъ напримѣръ, число веревокъ, соотвѣтствующее шкифу, приложенному къ точкѣ m', было бы равно количеству n',—для большей ясности взглянемъ при этомъ на фигуру. Представивъ себѣ, что въ системѣ, нами взятой, всѣ силы P, P′, P″ $\cdots$ замѣнены такимъ образомъ однимъ грузомъ Q (разумѣется, только представимъ себѣ, потому что сдѣлать этаго на самомъ дѣлѣ мы не можемъ, и разсматриваемъ чисто умозрительно т. е. не предполагая никакихъ физическихъ препятствій,—ни тренія, ни жесткости веревокъ и т. п.), мы можемъ разсматривать дѣйствіе

одного только его, не обращая уже болѣе никакого вниманія на данныя силы. Приведя же всѣ силы системы къ такой простотѣ, ясно видно, что грузъ можетъ произвести только тѣ перемѣщенія, которыя заставятъ его опуститься; тѣхъ же, которыя бы заставили его подняться или остаться на томъ же мѣстѣ, онъ произвести не можетъ. А изъ этаго естественнымъ образомъ слѣдуетъ, что силы могутъ произвести въ системѣ только тѣ перемѣщенія, при которыхъ часть веревки, заключающаяся между послѣднимъ неподвижнымъ блокомъ и грузомъ удлиннится, или иначе, возможныя перемѣщенія для силъ будутъ тѣ, при которыхъ часть веревки, отъ ея начала до послѣдняго неподвижнаго блока, укоротится. Теперь разсмотримъ какое либо перемѣщеніе въ системѣ, и предположимъ, что при этомъ перемѣщеніи точка m передвинется на разстояніе s, составляющее съ силою P, къ этой точкѣ приложенною, уголъ ω; то, назвавъ буквою r разстояніе точки m отъ неподвижнаго блока, того полиспаста, который прикрѣпленъ къ ней, до перемѣщенія, и буквою r' тоже разстояніе послѣ перемѣщенія, мы увидимъ что удлинненіе веревки между точкою m и тѣмъ неподвижнымъ блокомъ, будетъ $n(r'-r)$. Но намъ извѣстно, что

$$r'^2 = r^2 - 2rs\cos.\omega + s^2$$ откуда

$$r' = r\sqrt{1 - \frac{2s\cos.\omega}{r} + \frac{s^2}{r^2}} = r - s\cos.\omega$$

отбрасывая безконечно малыя величины втораго и высшихъ порядковъ. Отсюда получимъ

$$r' - r = -s\cos.\omega$$

по этому удлинненіе веревки будетъ $-ns\cos.\omega$. Это удлинненіе только при одной точкѣ m; означивъ буквами s', ω'; s'', ω''; ... количества подобныя s и ω, только лишь соотвѣтствующія точкамъ m', m''...., получимъ, что удлинненіе веревки при точкѣ m' будетъ $-n's'\cos\cdot\omega'$; при точкѣ m'' оно будетъ $-n''s''\cos.\omega''$, и такъ далѣе. И такъ удлинненіе всей веревки отъ начала до послѣдняго неподвижнаго блока, будетъ:

$$= ns\cos\cdot\omega - n's'\cos\cdot\omega' - n''s''\cos\cdot\omega'' - \&\ldots$$

и силы не могутъ сдѣлать ни одного перемѣщенія, при которомъ бы это количество было равно нулю, или бы было положительнымъ, или, что все равно, онѣ не могутъ произвести ни одного перемѣщенія, при которомъ бы было равно нулю или было бы отрицательнымъ количество

$$ns\cos\cdot\omega + n's'\cos\cdot\omega' + n''s''\cos\cdot\omega'' + \&\ldots$$

или лучше такое

$$Q(ns\cos\cdot\omega + n's'\cos\cdot\omega' + n''s''\cos\cdot\omega'' + \&\ldots)$$

Но такъ какъ $nQ = P$, $n'Q' = P'$, $n''Q'' = P''$, и такъ далѣе, слѣдовательно силы не могутъ произвести никакого такого перемѣщенія, при которомъ бы количество

$$Ps\cos\cdot\omega + P's'\cos\cdot\omega' + P''s''\cos\cdot\omega'' + \cdots$$

было равно нулю или было бы отрицательнымъ; и на оборотъ, онѣ могутъ произвести и произведутъ на самомъ дѣлѣ всѣ перемѣщенія, при которыхъ это количество будетъ положительнымъ. Въ этомъ и состоитъ та теорема, которую намъ надобно было доказать и которая составляетъ основаніе всей науки равновѣсія и движенія.

Послѣ всего сказаннаго, весьма уже легко при-

вести къ одной аналитической формулѣ всю науку равновѣсія, что мы теперь и постараемся исполнить на самомъ дѣлѣ. Для сего возвратимся къ возможнымъ и невозможнымъ перемѣщеніямъ и ко всему тому, что предшествовало теоріи моментовъ. Возможныя перемѣщенія опредѣляются линейными неравенствами между проекціями этихъ самыхъ перемѣщеній, мы означили чрезъ dL, dM, dN первые члены этихъ неравенствъ, въ которыхъ dL, dM, dN, какъ мы сказали, суть линейныя функціи количествъ dx, dy, dz; dx', dy', dz'; dx'', dy'', dz''.... И такъ какъ мы уже знаемъ, что

$$Ps\cos\cdot\omega = Xdx + Ydy + Zdz$$
$$P's'\cos\cdot\omega' = X'dx' + Y'dy' + Z'dz'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и что слѣдовательно полный моментъ приведется къ формулѣ

$$Xdx + Ydy + Zdz + X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + \&\ldots$$

то увидимъ, что вопросъ о равновѣсіи системы приведется къ такому: найти условія, необходимыя для того, чтобъ функція

$$Xdx + Ydy + Zdz + X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + \&\ldots$$

не могла сдѣлаться положительною ни для какой величины dx, dy, dz; dx', dy', dz'; dx'', dy'', dz''; &.... имѣющихъ какой-либо извѣстный знакъ въ количествахъ dL, dM, dN, который можетъ быть различенъ у разныхъ этихъ количествъ.

Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, найдемъ помощію уравненій:

$$dL = adx + bdy + cdz + a'dx' + b'dy' + c'dz' + a''dx'' + b''dx'' + \&\ldots$$
$$dM = a_1dx + b_1dy + c_1dz + a'_1dx' + b'_1dy' + c'_1dz' + a''_1dx'' + b''_1dy'' + \&\ldots$$
$$dN = a_2dx + b_2dy + c_2dz + a'_2dx' + b'_2dy' + c'_2dz' + a''_2dx'' + b''_2dy'' + \&\ldots$$

величины столькихъ дифференціаловъ dx, dy, dz; dx', dy', dz'; dx'', dy'', dz''; &···· сколько можно изъ нихъ найти, и подставимъ эти величины въ функцію:

$$Xdx + Ydy + Zdz + X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + \&\cdots$$

то она сдѣлается такою:

$$\lambda dL + \mu dM + \nu dN + \alpha dy_{1} + \beta dy_{1} + \gamma \delta z_{1} + \&\cdots$$

гдѣ dx_{1}, dy_{1}, dz_{1}, суть дифференціалы, остающіеся неопредѣленными, и которые слѣдовательно будутъ совершенно произвольной величины. И такъ должно, чтобъ

$$\lambda dL + \mu dM + \nu dN + \alpha dx_{1} + \beta dy_{1} + \gamma \delta z_{1} + \&\cdots$$

не могло сдѣлаться положительнымъ, и не измѣняя знака, могло бы быть равно нулю; но такъ какъ прежде уже мы сказали что, или только лишь

$$dL = 0, dM = 0, dN = 0$$

или dL, dM, dN могутъ имѣть какую, либо, величину съ постоянно однимъ и тѣмъ же знакомъ для всѣхъ возможныхъ перемѣщеній, т. е. удовлетворять неравенствамъ $dL > 0$ или $dL < 0$. $dM > 0$ или $dM < 0$ $dN > 0$ или $dN < 0$ (гдѣ впрочемъ неравенства не исключаютъ равенствъ), то и разсмотримъ: 1.) когда только лишь

$$dL = 0, dM = 0, dN = 0$$

то функція, о которой идетъ дѣло, приведется къ

$$\alpha dx_{1} + \beta dy_{1} + \gamma dz_{1} + \&\cdots\cdot$$

которая очевидно не можетъ оставаться постоянно положительною и необходимо будетъ измѣнять знакъ (по причинѣ произвольности величинъ дифференціаловъ dx_{1}, dy_{1}, $dz_{1}\cdots$), дотолѣ, пока не будетъ она равна нулю, для чего нужно, чтобъ было $\alpha = 0$, $\beta = 0$,

$y=0\cdots$ Здѣсь тотъ же самый ходъ, какъ и при нахожденіи наибольшихъ и наименьшихъ величинъ.

2.) Когда при этомъ количества dL, dM, dN будутъ имѣть какую либо величину, неравную нулю, мы получимъ:

$$Xdx+Ydy+Zdz+\cdots=\lambda dL+\mu dM+\nu dN\cdots$$

и дабы функція $\lambda dL+\mu dM+\nu dN\cdots$ не могла сдѣлаться положительною, въ то время какъ dL, dM, dN сохраняютъ одинъ какой либо извѣстный знакъ, надобно чтобъ количества λ, μ, $\nu\cdots$ имѣли знаки противные знакамъ dL, dM, $dN\cdots$, только въ одномъ этомъ случаѣ формула

$$\lambda dL+\mu dM+\nu dN+\cdots$$

не можетъ сдѣлаться положительною ни для одного изъ возможныхъ перемѣщеній.

Напишемъ предъидущее уравненіе въ такомъ видѣ:

$$Xdx+Ydy+Zdz+X'dx'+\ldots-\lambda dL-\mu dM-\nu dN-\ldots=0$$

гдѣ λ, μ, $\nu\cdots$ должны имѣть знаки противные знакамъ количествъ dL, dM, $dN\cdots$ для всѣхъ возможныхъ перемѣщеній. Можно въ послѣднемъ уравненіи замѣнить $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu\cdots$ относительно чрезъ λ, μ, $\nu\cdots$ прибавя только, что эти послѣднія количества имѣютъ знаки тѣже самые, какъ и количества dL, dM, $dN\cdots$ для всѣхъ возможныхъ перемѣщеній.

Такимъ образомъ общая формула для равновѣсія приведется къ слѣдующему уравненію:

$$Xdx+Ydy+Zdz+X'dx'+\ldots+\lambda dL+\mu dM+\nu dN\ldots=0$$

въ которомъ λ, μ, $\nu\cdots$, имѣютъ тѣже самые знаки какъ и функціи dL, dM, $dN\cdots$ относительно къ возможнымъ перемѣщеніямъ, и гдѣ количества dx, dy, dz; dx', dy', dz'; dx'',$\cdots$ совершенно произвольны;

такъ что, дабы предъидущее равенство могло имѣть мѣсто, надобно, чтобы коеффиціенты каждаго изъ дифференціаловъ dx, dy, dz; dx', dy',... были равны нулю, безъ чего получилось бы отношеніе между количествами совершенно произвольными, что невозможно.

Предъидущая формула даетъ всѣ уравненія, нужныя для равновѣсія какой либо системы съ тою же легкостію, какъ и извѣстныя Геометрическія формулы даютъ радіусы кривизны, нормальныя, подкасательныя, и проч.; что же касается до рѣшенія этихъ уравненій, то это уже дѣло чистаго Анализа.

Теперь выразимъ общую формулу равновѣсія, безъ помощи Математическаго Анализа: Чтобы найти условія равновѣсія какой либо системы, возьмемъ полный моментъ этой системы, для какого либо перемѣщенія (возможнаго или невозможнаго), придадимъ къ этому моменту первую часть уравненія или неравенства, отличающаго перемѣщенія возможныя отъ невозможныхъ, умножа ее, прежде присоединенія, на факторы, неопредѣленные по величинѣ; но имѣющіе тѣже знаки, какъ и первая часть неравенства или уравненія, относящагося къ возможнымъ перемѣщеніямъ, потомъ всю сумму для всѣхъ вообразимыхъ перемѣщеній уравнимъ нулю, то это уравненіе и будетъ общимъ уравненіемъ равновѣсія.

Слѣдуя точно этому правилу, мы будемъ увѣрены, что найдемъ уравненіе равновѣсія всякой системы, на которую дѣйствуютъ какія бы то ни было силы, и что ни одинъ вопросъ не останется нерѣшеннымъ. Частными случаями могли бы мы оправдать это, но такъ какъ цѣль этаго разсужденія не

есть рѣшеніе частныхъ вопросовъ Статики, то, не рѣшая многихъ вопросовъ, для примѣра сдѣлаемъ приложеніе теоріи нами изложенной къ равновѣсію жидкостей, и послѣ разсмотримъ, какъ частный случай такого равновѣсія — видъ планеты, нами обитаемой.

§ 2.

Равновѣсіе жидкихъ тѣлъ вообще.

Разсмотримъ несжимаемую жидкость, напр. воду, на каждую частицу которой дѣйствуютъ данныя силы. Чтобъ найти условія равновѣсія ея, надобно прежде всего составить полный моментъ. Для сего отнесемъ каждую частицу жидкости къ тремъ прямоугольнымъ и постоянпымъ осямъ, взятымъ въ пространствѣ, означимъ чрезъ dm массу какой либо частицы жидкости, и чрезъ x, y, z координаты этой частицы. Количества x, y, z, по ихъ измѣняемости, могутъ относиться ко всякой частицѣ жидкости. Принявъ это знакоположеніе, обозначимъ еще чрезъ Xdm, Ydm, Zdm движущія силы, приложенныя къ частицѣ dm. Если, сообразно съ тѣмъ, что мы уже сказали, мы изобразимъ чрезъ dx, dy, dz проекціи какого-либо перемѣщенія частицы dm, тогда

$$(Xdx + Ydy + Zdz)\ dm$$

изобразитъ моментъ силъ, приложенныхъ къ частицѣ dm. Но здѣсь представляется намъ затрудненіе, которое можно уничтожить не иначе, какъ употребя два различные знака для выраженія диффренціаціи.

Въ самомъ дѣлѣ, означимъ координаты частицы dm чрезъ x, y, z; естественно надобно, да и обыкновенно такъ дѣлается въ Геометріи, обозначить чрезъ $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ координаты смежной частицы; такъ что dx, dy, dz изобразятъ проекціи разстоянія этой послѣдней отъ частицы dm; и въ тоже время мы означили чрезъ dx, dy dz перемѣщеніе частицы dm, проектированное на оси координатъ. По этому, чтобы избѣжать всякаго двусмыслія, надобно означить дифференціалы, относящіеся къ перемѣщеніямъ частицы dm, знакомъ отличнымъ отъ знака d. Мы изберемъ для этаго, согласно со всѣми авторами, писавшими объ этомъ предметѣ знакъ δ, такъ что проекціи перемѣщенія частицы dm, мы будемъ обозначать чрезъ δx, δy, δz, а въ слѣдствіе такого знакоположенія, моментъ силъ дѣйствующихъ на частицу dm, выразится чрезъ

$$(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\ dm.$$

Чтобъ имѣть полный моментъ, надобно взять сумму всѣхъ частныхъ моментовъ, что можно получить интегруя выраженіе

$$(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\ dm$$

и распространяя интегралъ на всѣ частицы жидкости. И такъ выходитъ, что

$$\int(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\ dm$$

выразитъ моментъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на всѣ частицы жидкости.

Но независимо отъ силъ, дѣйствующихъ на всѣ частицы жидкости, можетъ случиться и случается часто, что поверхность жидкости или какая либо часть этой поверхности, подвержена внѣшнему дав-

ленію. Поэтому предположимъ, что, независимо отъ силъ X, Y, Z находятся еще другія приложенныя къ поверхности, а допустивъ ихъ, надобно будетъ раздѣлить поверхность на двѣ части: одну, о которой мы говоримъ, подвергнутую давленію, и другую, свободную отъ этаго давленія; послѣдняя часть была бы равна нулю, еслибы вся поверхность была подчинена внѣшнему давленію. Изобразимъ чрезъ $P ds$, $Q ds$, $R ds$ силы, составляющія давленіе на одну частицу ds поверхности, и направленныя параллельно осямъ координатъ. Моментъ этихъ силъ будетъ

$$(P\delta x + Q\delta y + R\delta z)\ ds$$

и интегруя это выраженіе, получимъ моментъ всѣхъ силъ, составляющихъ давленіе, распространяя этотъ интегралъ на всѣ точки давимой поверхности.

Теперь, такъ-какъ не существуетъ иныхъ силъ, приложенныхъ къ жидкости, кромѣ тѣхъ, которыя дѣйствуютъ на каждую частицу ея массы и тѣхъ, которыя производятъ давленіе на извѣстную часть ея поверхности, изъ этаго слѣдуетъ, что мы ввели въ разсмотрѣніе всѣ эти силы, и что полный моментъ нашей системы будетъ:

$$\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dm + \int (P\delta x + Q\delta y + R\delta z)\ ds.$$

первый изъ этихъ интеграловъ относится ко всей массѣ жидкости, вторый только лишь къ части жидкой поверхности, подверженной внѣшнему давленію.

Опредѣля полный моментъ, найдемъ теперь, какъ отдѣлить возможныя перемѣщенія отъ невозможныхъ; для этаго необходимо знать состояніе той жидкости, которая составляетъ предметъ нашихъ изслѣдованій. Предположимъ, что жидкость прикасается всею час-

тію, неподверженною внѣшнему давленію, къ неподвижному тѣлу, и тогда можно уже легко отдѣлить перемѣщенія возможныя отъ невозможныхъ, разсуждая слѣдующимъ образомъ: во-первыхъ, такъ-какъ жидкость несжимаема, то невозможно ни одно такое перемѣщеніе, при которомъ бы цѣлый объемъ ея, или только часть его, уменьшались,—возможны только тѣ перемѣщенія, при которыхъ объемъ остается тѣмъ же, и тѣ, при которыхъ онъ увеличивается. Далѣе, частицы, находящіяся въ соприкосновеніи съ стѣнками твердаго тѣла, не могутъ проникать внутрь этихъ стѣнокъ или за эти стѣнки, онѣ могутъ только удаляться отъ нихъ или, лучше, скользить по нимъ. Что касается до перваго условія, то, чтобы сдѣлать изъ него употребленіе, надобно найти измѣненіе какой нибудь части объема жидкости, происходящее отъ какого либо перемѣщенія, и потомъ сказать, что для возможныхъ перемѣщеній это измѣненіе можетъ быть только равно нулю или быть положительнымъ. Но изъ Геометріи намъ извѣстно, что какая либо часть объема можетъ быть выражена чрезъ

$$\int dx . dy . dz$$

бравъ этотъ интегралъ между надлежащими предѣлами. Произведя же перемѣщеніе, координаты x, y, z измѣнятся въ $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$,—остается опредѣлить перемѣну, которая произойдетъ отъ этаго въ интегралѣ $\int dx . dy . dz$. Положимъ для краткости $x+\delta x = p$, $y+\delta y = q$, $z+\delta z = r$. Очевидно, что p, q, r, будутъ координатами всѣхъ точекъ, принадлежащихъ къ части объема нами разсматриваемой, только уже послѣ перемѣщенія, точно также, какъ x, y,

z суть координаты той же самой части объема до перемѣщенія, т. е. въ ея первоначальномъ положеніи. Поэтому объемъ послѣ перемѣщенія сдѣлается

$$\int dp.\ dq.\ dr$$

а слѣдовательно

$$\int (dp.\ dq.\ dr - dx.\ dy.\ dz)$$

изобразитъ измѣненіе этаго объема. Теперь необходимо найти объемъ дифференціальный $dp.\ dq.\ dr$; замѣтимъ для этаго, что изъ трехъ дифференціаловъ dp, dq, dr, каждый берется принимая два другіе за постоянные, такъ что если, напримѣръ, мы примемъ, что

$$dp = \frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz$$

то въ тоже время надобно положить, что

$$dq = o,\ dr = o.$$

что намъ и дастъ

$$dp = \frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz$$

$$o = \frac{dq}{dx}dx + \frac{dq}{dy}dy + \frac{dq}{dz}dz.$$

$$o = \frac{dr}{dx}dx + \frac{dr}{dy}dy + \frac{dr}{dz}dz$$

Опредѣляя помощію двухъ послѣднихъ уравненій количества dy, dz, и поставляя ихъ величины въ первое, мы получимъ его въ такомъ видѣ:

$$(A)\quad dp = \frac{\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy}\frac{dr}{dz} - \frac{dp}{dx}\frac{dq}{dz}\frac{dr}{dy} + \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dz}\frac{dr}{dx}\right.}{\frac{dq}{dy}\frac{dr}{dz} - \frac{dq}{dz}\frac{dr}{dy}}$$

$$\frac{-\frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\frac{dr}{dz}+\frac{dp}{dz}\frac{dq}{dx}\frac{dr}{dy}-\frac{dp}{dz}\frac{dq}{dy}\frac{dr}{dx}\Big)dx}{\frac{dq}{dy}\frac{dr}{dz}-\frac{dq}{dz}\frac{dr}{dy}}$$

чтобъ получить dq, надобно сдѣлать

$$dp=o,\ dr=o;$$

но изъ предъидущаго видно, что $dp=o$ даетъ $dx=o$, поэтому, чтобъ получить dq, надобно положить $dx=o$, $dr=o$, что и дастъ

$$dq=\frac{dq}{dy}dy+\frac{dq}{dz}dz$$

$$o=\frac{dr}{dy}dy+\frac{dr}{dz}dz$$

изъ послѣдняго уравненія найдемъ, что

$$dz=\frac{-\frac{dr}{dy}dy}{\frac{dr}{dz}}$$

подставя же это выраженіе въ первое уравненіе, мы получимъ:

$$dq=\frac{\left(\frac{dq}{dy}\frac{dr}{dz}-\frac{dq}{dz}\frac{dr}{dy}\right)dy}{\frac{dr}{dz}}$$

наконецъ, чтобъ получить dr, надобно сдѣлать $dq=o$, $dp=o$, или, что все равно, $dx=o$, $dy=o$; сдѣлавъ же сіе, мы тотчасъ и получимъ:

$$dr=\frac{dr}{dz}dz$$

Составивъ же теперь произведеніе $dp.dq.dr$, очевидно будемъ имѣть:

$$dp.dq.dr = \left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy}\frac{dr}{dz} - \frac{dp}{dx}\frac{dq}{dz}\frac{dr}{dy} + \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dz}\frac{dr}{dx} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\frac{dr}{dz} + \frac{dp}{dz}\frac{dq}{dx}\frac{dr}{dy} - \frac{dp}{dz}\frac{dq}{dy}\frac{dr}{dx}\right)dx.dy.dz.$$

Подставляя это выраженіе въ

$$\int(dp.\ dq.\ dr - dx.\ dy.\ dz)$$

найдемъ

$$dp.\ dq.\ dr - dx\ dy\ dz) = \left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy}\frac{dr}{dz} - \frac{dp}{dx}\frac{dq}{dz}\frac{dr}{dy} + \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dz}\frac{dr}{dx} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\frac{dr}{dz} + \frac{dp}{dz}\frac{dq}{dx}\frac{dr}{dy} - \frac{dq}{dz}\frac{dq}{dy}\frac{dr}{dx} - 1.\right)dx\,dy\,dz.$$

въ этомъ выраженіи, разумѣется, мы будемъ принимать въ разсмотрѣніе, по правиламъ дифференціальнаго исчисленія, только безконечно малыя величины самаго низшаго порядка, всѣ же прочихъ порядковъ оставимъ безъ вниманія. Но здѣсь легко можно замѣтить, что только лишь одинъ членъ

$$\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy}\frac{dr}{dz} - 1$$

есть безконечно малая величина перваго порядка, всѣ прочія суть по крайнѣй мѣрѣ втораго, такъ что, ограничиваясь самымъ низшимъ порядкомъ, измѣненіе объема сдѣлается таково:

$$\int\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy}\frac{dr}{dz} - 1\right)dx.\,dy.\,dz$$

или, подставляя вмѣсто p, q, r ихъ величины $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ оно будетъ:

$$\int\left\{\left(1 + d\frac{\delta x}{dx}\right)\left(1 + d\frac{\delta y}{dy}\right)\left(1 + d\frac{\delta z}{dz}\right) - 1\right\}dx.\,dy\,dz$$

И здѣсь, оставляя только лишь безконечно малыя величины самаго низшаго порядка, найдемъ наконецъ

для измѣненія какой либо части объема жидкости, произшедшаго отъ какого либо перемѣщенія, слѣдующее выраженіе:

$$\int\left(d\frac{\delta x}{dx}+d\frac{\delta y}{dy}+d\frac{\delta z}{dz}\right)dx.\ dy.\ dz.$$

Теперь, если мы будемъ разсматривать одни только возможныя перемѣщенія, тогда для нихъ предъидущій интегралъ долженъ быть или равенъ нулю, или положительный, какія бы ни были его предѣлы, т. е. какая бы ни была часть жидкости, къ которой онъ относится. Но очевидно, что это возможно только тогда, когда бы было

$$\left(d\frac{\delta x}{dx}+d\frac{\delta y}{dy}+d\frac{\delta z}{dz}\right)dx.\ dy.\ dz \geqq 0$$

для каждой частицы жидкости. По общей теоріи намъ должно взять положительное количество p, и прибавить къ полному моменту количество

$$p\left(d\frac{\delta x}{dx}+d\frac{\delta y}{dy}+d\frac{\delta z}{dz}\right)dx.\ dy.\ dz$$

потомъ прибавить другое количество такого же рода, т. е.

$$p\left(d\frac{\delta x'}{dx'}+d\frac{\delta y'}{dy'}+d\frac{\delta z'}{dz'}\right)dx'\ dy'\ dz'$$

для другой частицы жидкости, потомъ третіе для третьей частицы, и такъ далѣе, для всѣхъ частицъ жидкой массы. Что и приведетъ насъ къ тому, что мы должны будемъ прибавить къ моменту, о которомъ идетъ дѣло, интегралъ

$$\int p\left(d\frac{\delta x}{dx}+d\frac{\delta y}{dy}+d\frac{\delta z}{dz}\right)dx.\ dy.\ dz$$

относящійся ко всей массѣ жидкости. Прибавя его, будемъ имѣть:

$$(B) \int (X dx + Y dx + Z dz) + \int (P\delta x + Q\delta y + R\delta z)$$
$$+ \int p \left(d\,\frac{\delta x}{dx} + d\,\frac{\delta y}{dy} + d\,\frac{\delta z}{dz} \right) dx.\,dy.\,dz$$

Теперь намъ остается сказать о частицахъ, находящихся въ соприкосновеніи къ стѣнкамъ твердаго тѣла или, просто, къ неподвижнымъ стѣнкамъ. Эти частицы не могутъ входить въ стѣнки,—означимъ чрезъ λ, μ, ν, углы, составляемые нормальною линіею къ неподвижнымъ стѣнкамъ съ осями координатъ, тогда уравненіе поверхности, общей твердому тѣлу и жидкости, можетъ быть выражено такъ:

$$dx \cos.\lambda + dy \cos\mu + dz \cos.\nu = 0$$

Но представя себѣ частицу, которая сначала была на поверхности въ точкѣ (x, y, z), и которая послѣ перемѣщенія принимаетъ положеніе, опредѣляемое координатами $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, мы легко увидимъ, что

$$\delta x \cos.\lambda + \delta y \cos.\mu + \delta z \cos.\nu$$

выразитъ проекцію перемѣщенія точки по линіи нормальной къ поверхности. Полагая же, что λ, μ, ν означаютъ углы, составляемые съ осями частію нормальной линіи, входящею въ стѣнки твердаго тѣла, замѣтимъ, что

$$\delta x \cos.\lambda + \delta y \cos.\mu + \delta z \cos.\nu$$

будетъ необходимо количество отрицательное или равное нулю для всѣхъ возможныхъ перемѣщеній; поэтому, взявъ отрицательное количество $T ds$, надобно будетъ прибавить къ формулѣ (B) столько членовъ такихъ, какъ

$$T (\cos.\lambda\, \delta x + \cos.\mu\, \delta y + \cos.\nu . \delta z)\, ds,$$

сколько находится частицъ на поверхности касанія, что и приводитъ къ тому, что намъ надобно будетъ прибавить интегралъ,

$$\int T(\delta x\cos.\lambda + \delta y\cos.\mu + \delta z\cos.\nu)\, ds$$

относящійся ко всей этой части жидкой поверхности.

И такъ, мы имѣемъ общее уравненіе равновѣсія несжимаемой жидкости, такое:

$$\int(Xdx + Ydy + Zdz) + \int(P\delta x + Q\delta y + R\delta z)\, ds$$

$$+ \int p\left(d\frac{\delta x}{dx} + d\frac{\delta y}{dy} + d\frac{\delta z}{dz}\right) dx\, dy\, dz$$

$$+ \int T(\delta x\cos.\lambda + \delta y\cos.\mu + \delta z\cos.\nu)\, ds = 0$$

въ этой формулѣ первый интегралъ равно какъ и третій, относятся ко всей массѣ жидкости, второй только лишь къ поверхности подчиненной внѣшнему давленію, и наконецъ четвертый къ поверхности касанія жидкости къ стѣнкамъ твердаго тѣла. Первый, вторый и четвертый интегралы имѣютъ видъ, удобный къ достиженію предположенной нами цѣли, между тѣмъ какъ третій не имѣетъ еще такой удобной формы, — поэтому перемѣнимъ его въ другой. Для сего замѣтимъ, что

$$p\, d\frac{\delta x}{dx} = d\frac{p\delta x}{dx} - \frac{dp}{dx}\delta x$$

$$p\, d\frac{\delta y}{dy} = d\frac{p\delta y}{dy} - \frac{dp}{dy}\delta y$$

$$p\, d\frac{\delta z}{dz} = d\frac{p\delta z}{dz} - \frac{dp}{dz}\delta z$$

поэтому

$$p\left(d\frac{\delta x}{dx} + d\frac{\delta y}{dy} + d\frac{\delta z}{dz}\right) = d\frac{p\delta x}{dx} + d\frac{p\delta y}{dy} + d\frac{p\delta z}{dz}$$

$$-\left(\frac{dp}{dx}\delta x+\frac{dp}{dy}\delta y+\frac{dp}{dz}\delta z\right)$$

а слѣдовательно

$$\int p\left(d\frac{\delta x}{dx}+d\frac{\delta y}{dy}+d\frac{\delta z}{dz}\right)dx\,dy\,dz=$$

$$\int\left(d\frac{p\delta x}{dx}+d\frac{p\delta y}{dy}+d\frac{p\delta z}{dz}\right)dx\,dy\,dz$$

$$-\int\left(\frac{dp}{dx}\delta x+\frac{dp}{dy}\delta y+\frac{dp}{dz}\delta z\right)dx\,dy\,dz$$

продолжая же все обозначать чрезъ λ, μ, ν углы, составляемые внѣшнею частію нормальной линіи къ поверхности жидкости, съ осями координатъ, легко замѣтить, что

$$\int\left(d\frac{p\delta x}{dx}+d\frac{p\delta y}{dy}+d\frac{p\delta z}{dz}\right)dx\,dy\,dz=$$

$$\int p\,(\delta x\cos.\lambda+\delta y\cos.\mu+\delta z\cos.\nu)\,ds.$$

теперь, обратя вниманіе на то, что количество dm, можетъ быть изображено чрезъ $\varrho.\,dx.\,dy.\,dz$ гдѣ ϱ означаетъ плотность жидкости, мы приведемъ общее уравненіе къ такому виду:

$$\left.\begin{array}{l}\int\left[\left(\varrho X-\frac{dp}{dx}\right)\delta x+\left(\varrho Y-\frac{dp}{dy}\right)\delta y+\left(\varrho Z-\frac{dp}{dz}\right)\delta z\right]dx\,dy\,dz\\+\int(P\delta x+Q\delta y+R\delta z)\,ds\\+\int T\,(\delta x\cos.\lambda+\delta y\cos.\mu+\delta z\cos.\nu)\,ds\\+\int p\,(\delta x\cos.\lambda+\delta y\cos.\mu+\delta z\cos.\nu)\,ds\end{array}\right\}=0.$$

Припомнимъ здѣсь опять, что изъ трехъ послѣднихъ интеграловъ, первый относится къ давимой части поверхности, вторый къ поверхности, находящейся въ соприкосновеніи съ твердымъ тѣломъ, такъ что эти два интеграла объемлютъ совершенно всю по-

верхность жидкости, и по этому третій интегралъ самъ по себѣ относится ко всей этой массѣ. Напишемъ наше общее уравненіе равновѣсія въ другомъ видѣ:

$$\left.\begin{array}{l}\int\left[\left(\varrho X-\frac{dp}{dx}\right)\delta x+\left(\varrho Y-\frac{dp}{dy}\right)\delta y+\left(\varrho Z-\frac{dp}{dz}\right)\delta z\right]dx\,dy\,dz\\ +\int[(P+p\cos.\lambda)\delta x+(Q+p\cos.\mu)\delta y+(R+p\cos.\nu)\delta z]\delta s\\ +\int(T+p)\,(\delta x\cos.\lambda+\delta y\cos.\mu+\delta z\cos.\nu)\,ds\end{array}\right\}=0$$

Уравнивая отдѣльно нулю коеффиціенты всѣхъ варіацій δx, δy, δz, найдемъ: 1-е для всей массы жидкаго тѣла

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dp}{dx}=\varrho X\\ \frac{dp}{dy}=\varrho Y\\ \frac{dp}{dz}=\varrho Z\end{array}\right\}(C)$$

2-е для той части поверхности, которая подчинена внѣшнему давленію

$$\left.\begin{array}{l}P+p\cos.\lambda=0\\ Q+p\cos.\mu=0\\ R+p\cos.\nu=0\end{array}\right\}(D)$$

3-е для поверхности прикасающейся къ твердому тѣлу:

$$T+p=0.$$

Разсмотримъ постепенно всѣ эти различныя уравненія, и во-первыхъ послѣднее изъ нихъ всегда можетъ быть удовлетворено, потому что p количество положительное, T количество отрицательное, и оба совершенно произвольныя; а изъ этаго видно, что уравненіе $T+p=0$ не опредѣлитъ ни сколько дѣйствительнаго состоянія жидкости.

Три уравненія (D) дадутъ:

$$P^2 + Q^2 + R^2 = p^2$$

и слѣдовательно

$$p = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}.$$

гдѣ надобно брать корень съ знакомъ $+$, потому что p должно быть количествомъ положительнымъ.

Но $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$

очевидно есть полное давленіе на поверхность, отнесенное къ единицѣ пространства. Означая это внѣшнее давленіе чрезъ π, получимъ $p = \pi$. Такимъ образомъ внѣшнее давленіе должно быть равно количеству p; потомъ будемъ имѣть:

$$\frac{P}{\pi} = -\cos.\ \lambda$$

$$\frac{Q}{\pi} = -\cos.\ \mu$$

$$\frac{R}{\pi} = -\cos.\ \nu.$$

что показываетъ, что внѣшнее давленіе на поверхность, должно имѣть направленіе по нормальной линіи къ сей поверхности и дѣйствовать внутрь жидкой массы. И такъ, уравненія (D) могутъ быть замѣнены однимъ уравненіемъ $p = \pi$, прибавя только къ этому, что давленіе π производится по нормальной къ поверхности, дѣйствуя извнѣ внутрь ея.

Наконецъ изъ уравненій (C) помножая первое на dx, второе на dy и третіе на dz и слагая ихъ въ одно, найдемъ, что

$$dp = \varrho\ (Xdx + Ydy + Zdz)$$

гдѣ dx, dy, dz суть произвольныя дифференціалы. Это уравненіе, имѣя мѣсто для всей жидкой массы,

должно также относиться и къ частицамъ, находящимся на ея поверхности; но для этихъ послѣднихъ $p = \pi$, а по этому уравненіе поверхности сдѣлается

$$d\pi = \varrho (Xdx + Ydy + Zdz)$$

Въ приложеніи къ опредѣленію вида земли, слѣдующему за этимъ, мы будемъ имѣть надобность только въ одномъ этомъ уравненіи, поэтому мы и оставимъ всѣ подробности, относительно равновѣсія жидкостей, которыя можно найти съ большею или меньшею ясностію, изложенныя въ большей части Гидростатикъ.

§ 3.

Равновѣсіе силъ, приложенныхъ къ жидкимъ эллипсоидамъ.

Чтобъ сдѣлать приложеніе изложенной нами Теоріи или, лучше, формулы, выведенной нами для равновѣсія жидкихъ тѣлъ, рѣшимъ здѣсь одинъ весьма важный вопросъ, что *всякая жидкость, частицы которой взаимно притягиваются по Нютонову закону, и вращаются около неподвижной оси, точно также какъ когда бы эта жидкость была твердымъ тѣломъ, можетъ удовлетворять условіямъ равновѣсія, имѣя видъ эллипсоида съ тремя неравными осями.* Вопросъ этотъ особенно важенъ по весьма близкому отношенію его къ знаменитой задачѣ объ опредѣленіи фигуры небесныхъ тѣлъ, а потому и разсмотримъ его поподробнѣе.

Весьма долгое время Геометры думали, что между эллипсоидами, одни только эллипсоиды вращенія могутъ удовлетворять условію равновѣсія жидкой массы, вращающейся около неподвижной оси, и только лишь недавно сдѣлали замѣчаніе, что могутъ также ему удовлетворять и эллипсоиды съ тремя неравными осями. Впрочемъ и въ самомъ этомъ замѣ-

чаніи новѣйшіе Геометры удовольствовались однимъ изложеніемъ его, не давъ точнаго доказательства, а потому я долгомъ почитаю изложить самый анализъ, доведшій до этаго доказательства, и слѣдовательно служащій основаніемъ доказываемой истинѣ, — онъ-то и будетъ главнымъ предметомъ сей части моего разсужденія.

Пусть x, y, z, будутъ координаты какой либо частицы жидкости, такъ какъ онѣ суть величины перемѣнныя, поэтому онѣ одинаково будутъ принадлежать всѣмъ частицамъ ея, и пусть жидкость будетъ имѣть видъ эллипсоида съ тремя неравными осями; тогда координаты частицъ ея непремѣнно должны будутъ удовлетворять общему уравненію эллиптическихъ поверхностей, т. е. такому:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Посмотримъ теперь, не дастъ ли намъ такого же уравненія, общая формула для равновѣсія жидкихъ тѣлъ. Эта формула, какъ мы уже видѣли въ предъидущемъ §, для всѣхъ частицъ на поверхности жидкости находящихся, такова:

$$d\pi=\varrho\,(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz)$$

гдѣ X, Y, Z означаютъ слагающія, параллельныя осямъ, ускорительныхъ силъ, дѣйствующія на каждую частицу жидкости. Въ настоящемъ случаѣ, нами разсматриваемомъ, вся поверхность жидкости свободна, и π остается неизмѣннымъ на всемъ пространствѣ этой поверхности, а слѣдовательно мы имѣемъ:

$$o=\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz.$$

Остается только лишь вычислить силы X, Y, Z. Очевидно что здѣсь силы, взаимно сами себя уравновѣшивающія, зависятъ не отъ одного только лишь притяженія частицъ жидкости; но также еще и отъ ихъ движенія. Еслибъ жидкость находилась въ покоѣ или имѣла бы одно прямолинейное и однообразное движеніе, то силы взаимнаго притяженія уничтожали бы сами себя; но такъ какъ она здѣсь находится въ движеніи вращательномъ, то ясно, что здѣсь участвуютъ двѣ силы, одна сообщившая его частицамъ и другая сила взаимнаго ихъ притяженія. Поэтому для уравновѣшенія этихъ силъ надобно разсматривать для всѣхъ частицъ такую силу, которая бы произвела въ нихъ такое же точно движеніе, какое производятъ онѣ сами, и тогда всѣ силы, взятыя въ противномъ направленіи, уничтожатъ и движеніе и взаимное притяженіе этихъ частицъ. Такимъ образомъ количества X, Y, Z, зависятъ не только лишь отъ одного притяженія частицъ, но также отъ того движенія, которое бы произвела каждая изъ нихъ, разсматриваемая отдѣльно, т. е. независимо отъ всѣхъ прочихъ.

Займемся теперь этими послѣдними силами: предположимъ, что жидкій эллипсоидъ вращается около оси (z), то разсматривая какую либо частицу, имѣющую координатами x, y, z, увидимъ, что сумма x^2+y^2 останется независимою отъ времени, или иначе, разстояніе этой частицы отъ оси (z), будетъ величина постоянная, которую назвавъ буквою d, получимъ:

$$x^2+y^2=d^2 \text{ откуда}$$

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$$

гдѣ t означаетъ время; $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ суть какъ извѣстно, скорости частицы, относительно параллельныя осямъ x и y, такъ что, обозначивъ буквами u и v эти скорости, т. е. положивъ

$$u=\frac{dx}{dt},\quad v=\frac{dy}{dt}$$

мы получимъ:

$$xu+yv=0$$

или лучше: $\frac{u}{y}=-\frac{v}{x}=\pm\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=i\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

поставивъ i вмѣсто ± 1. Но ясно что $\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ есть скорость частицы, раздѣленная на разстояніе ея отъ оси вращенія, т. е. что это есть скорость частицы, отнесенная къ единицѣ разстоянія, назвавъ ее буквою ω, мы будемъ имѣть:

$$u=iy\omega;\quad v=-ix\omega.$$

и слѣдовательно

$$\frac{du}{dt}=i\frac{dy}{dt}\omega=iv\omega=-i^2x\omega^2=-x\omega^2$$

$$\frac{dv}{dt}=-i\frac{dx}{dt}\omega=-iu\omega=-i^2y\omega^2=-y\omega^2.$$

но такъ какъ $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ суть слагающія той силы, которая можетъ произвести наблюдаемое движеніе, то принимая ихъ съ противными знаками, мы полу-

чимъ $x\omega^2$ $y\omega^2$, первое для части X, происходящей отъ движенія жидкости, и второе для части Y, происходящей отъ той же самой причины. Такимъ образомъ мы получили одну часть ускорительныхъ силъ X, Y, Z; остается еще прибавить къ нимъ силу, зависящую отъ взаимнаго притяженія частицъ. Назовемъ слагающія этой силы относительно параллельныя осямъ координатъ буквами X_1, Y_1, Z_1, то и получимъ:

$$X = X_1 + \omega^2 x, \; Y = Y_1 + \omega^2 y, \; Z = Z_1.$$

и выведенное нами уравненіе равновѣсія:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

сдѣлается такимъ:

$$(X_1 + \omega^2 x)\, dx + (Y_1 + \omega^2 y)\, dy + Z_1 dz = 0.$$

которое мы напишемъ просто такъ:

$$(X + \omega^2 x)\, dx + (Y + \omega^2 y)\, dy + Zdz = 0$$

принимая уже X, Y, Z за слагающія притяженія, дѣйствующаго на частицу (x, y, z) всего эллипсоида. Найдемъ теперь эти послѣднія. Такъ какъ X, Y, Z, суть ускорительныя силы, то предположивъ массу точки $(x, y, z) = 1$, мы увидимъ, что дѣйствіе какой либо частицы, имѣющей массу m на частицу (x, y, z), можетъ выразиться чрезъ

$$\frac{f\, m}{r^2}$$

гдѣ f есть количество постоянное и r разстояніе частицы съ массою m отъ (x, y, z). Означивъ чрезъ λ, μ, ν, углы, которыя линія r, разсматриваемая направленною отъ (x, y, z) къ m, составляетъ съ осями координатъ положительныхъ, мы при каждой такой частицѣ m эллипсоида, получимъ:

$$\frac{fm\cos.\lambda}{r^2}$$

$$\frac{fm\cos.\mu}{r^2}$$

$$\frac{fm\cos.\nu}{r^2}$$

для силъ, составляющихъ притяженіе $\frac{fm}{r^2}$ и разложенныхъ параллельно осямъ координатъ. Интегрируя эти выраженія для всѣхъ частицъ m, составляющихъ эллипсоидъ, будемъ имѣть:

$$X = f\int\frac{m\cos.\lambda}{r^2}$$

$$Y = f\int\frac{m\cos.\mu}{r^2}$$

$$Z = f\int\frac{m\cos\nu}{r^2}$$

Теперь, чтобъ найти выраженіе для массы m, опишемъ около точки (x, y, z) шаровую поверхность радіусомъ, равнымъ единицѣ, и взявъ дифференціальный елементъ $d\pi$ этой поверхности, чрезъ всѣ точки окружности этаго елемента проведемъ радіусы векторы r, то и получимъ нѣкоторое пирамидальное пространство. Часть этаго пространства, заключающаяся между двумя шаровыми поверхностями, описанными изъ точки (x, y, z), одною имѣющею радіусомъ r и другою имѣющею радіусомъ $r + dr$, можетъбыть принята за объемъ частицы m. Поэтому, назвавъ буквою ϱ плотность эллипсоида, массу m можно изобразить слѣдующимъ образомъ:

$$m = \varrho\, r^2\, dr.\, d\pi.$$

что и дастъ:

$$X = f\varrho \int \cos.\lambda\, dr.\, d\pi$$

$$Y = f\varrho \int \cos.\mu\, dr.\, d\pi$$

$$Z = f\varrho \int \cos.\nu\, dr.\, d\pi.$$

Такъ какъ точка (x, y, z) находится на поверхности эллипсоида, то уравненіе этой поверхности даетъ для r двѣ величины, одну равную нулю, и другую, которую мы обозначимъ буквою R, а слѣдовательно и интегрировать наши выраженія надобно будетъ отъ $r = o$ до $r = R$. Произведя эту интеграцію получимъ

$$X = f.\varrho \int R.\cos.\lambda\, d\pi$$

$$Y = f.\varrho \int R.\cos.\mu\, d\pi$$

$$Z = f.\varrho \int R.\cos.\nu\, d\pi$$

Чтобъ имѣть величину R, относящуюся къ частицамъ, которыя находятся на поверхности эллипсоида, найдемъ сначала величину разстоянія отъ точки (x, y, z) до какой либо другой точки эллипсоида. Удерживая предъидущее обозначеніе этаго разстоянія, т. е. называя его буквою r и принявъ, что x', y', z' суть координаты какой либо частицы этаго эллипсоида, на концѣ r находящейся, будемъ имѣть:

$$\frac{x' - x}{r} = \cos.\lambda$$

$$\frac{y' - y}{r} = \cos.\mu$$

$$\frac{z' - z}{r} = \cos.\nu$$

откуда

$$x' = x + r\cos.\lambda$$

$$y' = y + r \cos. \mu$$
$$z' = z + r \cos. \nu.$$

Зная, что искомый нами R, относится къ частицамъ, на поверхности эллипсоида находящимся, мы замѣтимъ, что въ томъ случаѣ, когда мы подставимъ его вмѣсто r, координаты x', y', z' должны будутъ удовлетворять уравненію этой поверхности, для которой, называя буквами a, b, c полуоси ея, получимъ такое уравненіе:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

соединяя его съ выведенными нами уравненіями, въ которыхъ въ настоящемъ случаѣ, какъ мы уже сказали, r обратится въ R, т. е. съ такими:

$$x' = x + R \cos. \lambda$$
$$y' = y + R \cos. \mu$$
$$z' = z + R \cos. \nu$$

будетъ имѣть такое уравненіе въ R:

$$\frac{(R \cos. \lambda + x)^2}{a^2} + \frac{(R \cos. \mu + y)^2}{b^2} + \frac{(R \cos. \nu + z)^2}{c^2} = 1$$

возвышая члены его въ самомъ дѣлѣ въ квадратъ, т. е. получа въ такомъ видѣ:

$$\frac{R^2 \cos.^2 \lambda + 2 R x \cos. \lambda + x^2}{a^2} + \frac{R^2 \cos.^2 \mu + 2 R y \cos. \mu + y^2}{b^2}$$
$$+ \frac{R^2 \cos.^2 \nu + 2 R z \cos. \nu + z^2}{c^2} = 1$$

и зная, что

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

приведемъ его къ такому виду:

$$R^2 (b^2 c^2 \cos.^2 \lambda + a^2 c^2 \cos.^2 \mu + a^2 b^2 \cos.^2 \nu)$$
$$+ 2 R (b^2 c^2 x \cos. \lambda + a^2 c^2 y \cos. \mu + a^2 b^2 z \cos. \nu) = 0.$$

гдѣ, полагая для краткости:

$$b^2 c^2 \cos.^2 \lambda + a^2 c^2 \cos.^2 \mu + a^2 b^2 \cos.^2 \nu = l$$

$b^2 c^2 x \cos. \lambda + a^2 c^2 y \cos. \mu + a^2 b^2 z \cos. \nu = n$
получимъ:

$$l R^2 + 2 n R = 0$$

$$\text{или } R(l R + 2 n) = 0$$

и тогда для R будемъ имѣть двѣ величины:

$$R = o$$

$$\text{и } R = -\frac{2n}{l}$$

Очевидно что $R = o$ относится къ самой частицѣ (x, y, z), поэтому мы и возмемъ послѣднюю, что и дастъ:

$$X = -2 f \varrho \int \frac{n \cos. \lambda}{l} d\pi.$$

$$Y = -2 f \varrho \int \frac{n \cos. \mu}{l} d\pi.$$

$$Z = -2 f \varrho \int \frac{n. \cos. \nu}{l} d\pi.$$

Гдѣ интегралы относятся ко всѣмъ тѣмъ елементамъ сферической поверхности, которыя встрѣчаются съ радіусами векторами, проведенными изъ точки (x, y, z) ко всѣмъ точкамъ поверхности эллипсоида, и легко замѣтить, что если чрезъ точку (x, y, z) проведемъ плоскость касательную къ эллипсоиду, то всѣ елементы сферической поверхности, находящіяся съ той же стороны плоскости какъ и эллипсоидъ, будутъ относиться ко всѣмъ радіусамъ векторамъ, о которыхъ идетъ дѣло, и что такимъ образомъ должно интегрировать для всѣхъ елементовъ, заключающихся въ полушаріи, отдѣленномъ касательною плоскостію. Но чтобы легче найти намъ предѣлы, между которыми должно брать величины λ, μ, ν въ нашихъ интегралахъ, замѣтимъ, что какая бы ни

была величина этихъ λ, μ, ν, соотвѣтствующая различнымъ елементамъ полушарія, о которомъ мы говоримъ, тѣже количества въ другомъ полушаріи, по другую сторону касательной плоскости находящемся, были бы относительно $\pi-\lambda$, $\pi-\mu$, $\pi-\nu$. И для нихъ величины

$$\frac{n\cos.\lambda}{l},\ \frac{n\cos.\mu}{l},\ \frac{n\cos.\nu}{l}$$

не перемѣняются, т. е. остаются тѣми же самыми для $\pi-\lambda$, $\pi-\mu$, $\pi-\nu$, какими онѣ были и для λ, μ, ν. Откуда видно, что если бы вмѣсто того, чтобы искать между какими именно предѣлами λ, μ, ν, брать наши интегралы, мы взяли ихъ относительно ко всѣмъ елементамъ цѣлой шаровой поверхности, то мы удвоили бы величину этихъ интеграловъ, такъ что каждый изъ искомыхъ нами интеграловъ составлялъ бы половину интеграла, взятаго для всей сферической поверхности. И такъ можно предположить, что въ величинахъ X, Y, Z, интегралы взяты относительно ко всей поверхности сферической, раздѣля только эти величины на 2, что и дастъ:

$$X = -f\varrho\int\frac{n\cos.\lambda\,d\pi}{l}$$

$$Y = -f\varrho\int\frac{n\cos.\mu\,d\pi}{l}$$

$$Z = -f\varrho\int\frac{n\cos.\nu\,d\pi}{l}$$

и тогда уже здѣсь интегралы должны быть взяты для всѣхъ величинъ λ, μ, ν между предѣлами o и π, удовлетворяющихъ только одному уравненію такому:

$$\cos.^2\lambda + \cos.^2\mu + \cos.^2\nu = 1.$$

подставляя теперь вмѣсто n его величину

$$b^2 c^2 x \cos. \lambda + a^2 c^2 y \cos. \mu + a^2 b^2 z \cos. \nu$$

мы увидимъ, что интегралы наши будутъ двоякаго рода, одни такіе:

$$\frac{\cos.^2 \lambda\, d\pi}{l}, \frac{\cos.^2 \mu\, d\pi}{l}, \frac{\cos.^2 \nu\, d\pi}{l},$$

другіе такіе:

$$\frac{\cos. \lambda \cos. \mu\, d\pi}{l}, \frac{\cos \lambda \cos. \nu\, d\pi}{l}, \frac{\cos. \mu \cos. \nu\, d\pi}{l},$$

но легко увѣриться, что между предѣлами, о которыхъ идетъ дѣло, эти три послѣдніе интеграла уничтожатся, т. е. что между этими предѣлами будемъ имѣть:

$$\frac{\cos. \lambda \cos. \mu\, d\pi}{l} = o$$

$$\frac{\cos. \lambda \cos. \nu\, d\pi}{l} = o$$

$$\frac{\cos. \mu \cos. \nu\, d\pi}{l} = o.$$

Въ самомъ дѣлѣ разсмотримъ

$$\frac{\cos. \lambda \cos. \mu\, d\pi}{l}$$

Давши постоянное значеніе величинамъ λ и μ, предъидущій интегралъ будетъ заключать въ себѣ елементъ:

$$\frac{\cos. \lambda \cos. \mu\, d\pi}{l}$$

но бравъ λ и μ между предѣлами o и π непремѣнно будутъ еще другіе елементы: одинъ соотвѣтствующій $\pi - \lambda$ и μ, этотъ елементъ будетъ

$$-\frac{\cos. \lambda \cos. \mu\, d\pi,}{l}$$

другой соотвѣтствующій λ и $\pi - \mu$ онъ будетъ тоже:

$$-\frac{\cos.\lambda\cos.\mu\,d\pi}{l},$$

и третій, соотвѣтствующій $\pi-\lambda$ и $\pi-\mu$ онъ будетъ

$$\frac{\cos.\lambda\cos.\mu\,d\pi}{l},$$

такъ, что сумма всѣхъ этихъ элементовъ и будетъ равна нулю. По этому всѣ элементы нашего интеграла уничтожатся одинъ по одному, и такимъ образомъ будетъ:

$$\frac{\cos.\lambda\cos.\mu\,d\pi}{l}=o$$

тоже можно сказать относительно къ двумъ другимъ интеграламъ, и слѣдовательно получимъ:

$$\frac{\cos.\lambda\cos.\nu\,d\pi}{l}=o$$

$$\frac{\cos.\mu\cos.\nu\,d\pi}{l}=o$$

Зная же это, мы тотчасъ увидимъ, что наши величины X, Y, Z, обратятся въ слѣдующія:

$$X=-f\varrho\,b^2c^2x\int\frac{\cos.^2\lambda\,d\pi}{l}$$

$$Y=-f\varrho\,a^2c^2y\int\frac{\cos.^2\mu\,d\pi}{l}$$

$$Z=-f\varrho\,a^2b^2z\int\frac{\cos.^2\nu\,d\pi}{l}$$

что и приведетъ насъ къ такому уравненію:

$$\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}=-f\varrho\int\frac{b^2c^2\cos.^2\lambda+a^2c^2\cos.^2\mu+a^2b^2\cos.^2\nu}{l}\,d\pi$$

$$=-f\varrho\int\frac{b^2c^2\cos.^2\lambda+a^2c^2\cos.^2\mu+a^2b^2\cos.^2\nu}{b^2c^2\cos.^2\lambda+a^2c^2\cos.^2\mu+a^2b^2\cos.^2\nu}\,d\pi$$

$$=-f\varrho\int d\pi=-4\pi f\varrho$$

Эта теорема принадлежитъ *Лежандру*; но предъиду-

щее доказательство гораздо проще нежели доказательство этаго знаменитаго геометра. —

Сдѣлавъ для сокращенія

$$A = f\varrho \int \frac{b^2 c^2 \cos.^2 \lambda\, d\pi}{l}$$

$$B = f\varrho \int \frac{a^2 c^2 \cos.^2 \mu\, d\pi}{l}$$

$$C = f\varrho \int \frac{a^2 b^2 \cos.^2 \nu\, d\pi}{l}$$

получимъ $X = -Ax,\ Y = -By,\ Z = -Cz$

и $A + B + C = 4\pi f\varrho$

гдѣ A, B, C очевидно не зависятъ отъ x, y, z; и уравненіе равновѣсія

$$0 = (X + \omega^2 x)\, dx + (Y + \omega^2) y\, dy + Zdz$$

сдѣлается

$$(A - \omega^2)\, xdx + (B - \omega^2)\, ydy + Czdz = 0$$

которое интегрируя, получимъ:

$$(A - \omega^2)\, x^2 + (B - \omega^2)\, y^2 + Cz^2 = h$$

гдѣ h есть произвольная величина. Сравнивая это уравненіе съ общимъ уравненіемъ эллипсоида, т: е: такимъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

найдемъ, что для того, чтобы во время равновѣсія жидкость имѣла видъ эллипсоида съ тремя неравными осями, нужно имѣть:

$$\frac{A - \omega^2}{h} = \frac{1}{a^2};\ \frac{B - \omega^2}{h} = \frac{1}{b^2};\ \frac{C}{h} = \frac{1}{c^2}$$

откуда находимъ:

$$\omega^2 = \frac{a^2 A + b^2 B + c^2 C - 3 c^2 C}{a^2 + b^2}$$

величину A + B + C мы имѣемъ, — для исключенія же C, выведемъ изъ тѣхъ же самыхъ уравненій другое выраженіе для ω^2, такое:

$$\omega^2 = \frac{A + B + C}{2} - \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{2a^2 b^2} C$$

а изъ сравненія между собою вторыхъ частей этихъ уравненій получимъ:

$$C = \frac{a^2 b^2 [(a^2 + b^2)(A + B + C) - 2(a^2 A + b^2 B + c^2 C)]}{(a^2 + b^2)(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - 6 a^2 b^2 c^2}.$$

подставляя же эту величину въ выраженіи для ω^2, найдемъ:

$$\omega^2 = \frac{(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)(a^2 A + b^2 B + c^2 C) - 3 a^2 b^2 c^2 (A + B + C)}{(a^2 + b^2)(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - 6 a^2 b^2 c^2}$$

Эти два послѣднія уравненія замѣнятъ намъ тѣ, изъ которыхъ они были выведены; чтобъ сдѣлать изъ нихъ употребленіе, надобно знать величины количествъ A + B + C, $a^2 A + b^2 B + c^2 C$ и C. Величина перваго намъ извѣстна, потому что мы имѣемъ

$$A + B + C = 4 \pi f \varrho$$

остается только отъискать:

$$a^2 A + b^2 B + c^2 C = f \varrho a^2 b^2 c^2 \int \frac{d\pi}{l}$$

$$\text{и} \qquad C = f \varrho a^2 b^2 \int \frac{\cos.^2 \nu \, d\pi}{l}.$$

такъ какъ интегрировать должно для всѣхъ возможныхъ величинъ λ, μ, ν, которыя будучи взяты между предѣлами o и π, удовлетворяютъ уравненію:

$$\cos.^2 \lambda + \cos.^2 \mu + \cos.^2 \nu = 1.$$

то представя это уравненіе въ такомъ видѣ:

$$\cos.^2 \lambda + \cos.^2 \mu = \sin^2 \nu$$

увидимъ, что оно непремѣнно будетъ удовлетворено полагая:

$$\cos.\lambda = \sin\nu.\cos.\theta$$
$$\cos.\mu = \sin\nu\sin\theta$$

лишь бы только θ было въ предѣлахъ отъ 0 до 2π Здѣсь легко видѣть, что елементъ $d\pi$, можетъ быть выраженъ чрезъ:

$$\sin\nu\, d\theta.\ d\nu.$$

такъ что будемъ имѣть:

$$a^2A + b^2B + c^2C =$$

$$f\varrho a^2b^2c^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\nu\, d\theta\, d\nu}{b^2c^2\sin^2\nu\cos.^2\theta + a^2c^2\sin^2\nu\sin^2\theta + a^2b^2\cos^2\nu}$$

$$C = f\varrho a^2b^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos.^2\nu.\sin\nu\, d\theta\, d\nu}{b^2c^2\sin^2\nu\cos.^2\theta + a^2c^2\sin^2\nu\sin^2\theta + a^2b^2\cos.\nu}$$

или лучше: $a^2A + b^2B + c^2C =$

$$8f\varrho a^2b^2c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\nu\, d\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{b^2c^2\sin^2\nu\cos^2\theta + a^2c^2\sin^2\nu\sin^2\theta + a^2b^2\cos.^2\nu}$$

$$C = 8f\varrho a^2b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.^2\nu\sin.\nu d\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{b^2c^2\sin^2\nu\cos.^2\nu + a^2c^2\sin^2\nu\sin^2\theta + a^2b^2\cos.^2\nu}$$

пусть будетъ:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{b^2c^2\sin^2\nu\cos.^2\theta + a^2c^2\sin^2\nu\sin^2\theta + a^2b^2\cos.^2\nu}$$

то мы будемъ имѣть:

$$a^2A + b^2B + c^2C = 8f\varrho a^2b^2c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} V\sin\nu\, d\nu$$

$$C = 8f\varrho a^2b^2 \int_0^{\pi} V\cos.^2\nu\sin\nu d\nu.$$

Чтобы опредѣлить V, напишемъ его въ такомъ видѣ:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{b^2c^2\sin^2\nu\cos.^2\theta + a^2c^2\sin^2\nu\sin^2\theta + a^2b^2\cos.^2\nu\,(\cos.^2\theta + \sin^2\theta)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2\cos.^2\nu + c^2\sin^2\nu)\, b^2\cos.^2\theta + (b^2\cos.^2\nu + c^2\sin^2\nu)\, a^2\sin^2\theta}$$

или еще лучше, полагая:

$$b^2(a^2\cos.^2\nu + c^2\sin^2\nu) = p^2$$
$$a^2(b^2\cos.^2\nu + c^2\sin^2\nu) = q^2$$

въ такомъ:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{p^2\cos.^2\theta + q^2\sin^2\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos.^2\theta(p^2 + q^2 tg^2\theta)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d.tg.\theta}{p^2 + q^2 tg.^2\theta.}$$

$$\text{но} \int \frac{d.tg.\theta}{p^2 + q^2 tg^2\theta} = \frac{arc.tg.\left(\frac{q}{p}\, tg\,\theta\right)}{pq}$$

поэтому:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\ tg.\ \theta}{p^2 + q^2 tg^2\theta} = \frac{\pi}{2pq}$$

$$= \frac{\pi}{2ab} \frac{1}{(a^2\cos.^2\nu + c^2\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}}(b^2\cos.^2\nu + c^2\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}}}$$

и слѣдовательно

$$a^2A + b^2B + c^2C =$$

$$4\pi f\varrho abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\nu.d\nu.}{(a^2\cos.^2\nu + c^2\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}}(b^2\cos.^2\nu + c^2\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}}}$$

$$C = 4\pi f\varrho ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos.^2\nu\sin\nu.d\nu.}{(a^2\cos.^2\nu + c^2\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}}(b^2\cos.^2\nu + c^2\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}}}$$

Приведя такимъ образомъ, къ этому виду теперь уже легко привести наши выраженія для $a^2A + b^2B + c^2C$ и C къ эллиптическимъ функціямъ, для этого надобно учредить порядокъ между величинами полуосей a, b, c. Предположимъ что

$$a > b > c$$

такъ что

$$a^2 - b^2,\ a^2 - c^2,\ b^2 - c^2$$

будутъ количества положительныя, и къ томуже

$$a^2 - c^2 > b^2 - c^2.$$

Предположимъ еще, что

$$\cos.\,v = \frac{c.\,tg.\,\varphi}{\sqrt{a^2 - c^2}}$$

то для $v = o$ мы получимъ $tg.\,\varphi = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2}}$

и для $v = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = o$. Такимъ образомъ новый интегралъ будетъ взятъ отъ $\varphi = arc.\,tg.\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2}}$ до $\varphi = o$, или лучше, перемѣня только знаки, отъ $\varphi = o$ до $\varphi = arc.\,tg.\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2}}$

Принявъ такимъ образомъ мы будемъ имѣть:

$$a^2\cos.^2 v + c^2\sin^2 v = (a^2 - c^2)\cos.^2 v + c^2 = \frac{c^2}{\cos.^2\varphi}$$

$$b^2\cos.^2 v + c^2\sin^2 v = (b^2 - c^2)\cos.^2 v + c^2$$

$$= c^2\left[\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}tg^2\,\varphi + 1\right] = c^2\frac{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}\sin^2\varphi\right)}{\cos.^2\varphi.}$$

а слѣдовательно:

$$(a^2\cos.^2 v + c^2\sin^2 v)^{\frac{1}{2}}(b^2\cos.^2 v + c^2\sin^2 v)^{\frac{1}{2}} = c^2\frac{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}\sin^2\varphi}}{\cos.^2\varphi}$$

или полагая для краткости $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} = k^2$

$$(a^2\cos.^2 v + c\,\sin^2 v)^{\frac{1}{2}}(b^2\cos.^2 v + c^2\sin^2 v)^{\frac{1}{2}} = \frac{c^2\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}{\cos.^2\varphi}$$

гдѣ положивъ $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\Delta$, получимъ въ такомъ видѣ:

$$(a^2\cos.^2\nu+c^2\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}}(b^2\cos.^2\nu+c_2\sin_2\nu)^{\frac{1}{2}}=\frac{c^2\Delta}{\cos.^2\varphi}$$

Чтобъ получить числителей нашихъ предъидущихъ выраженій въ функціи того же φ имѣемъ:

$$\cos.\nu=\frac{c\,tg.\varphi}{\sqrt{a^2-c^2}}\text{ поэтому }\cos.^3\nu=\frac{c^3\,tg.^3\nu}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

которыя дифференцируя получаемъ:

$$\sin\nu.d\nu=-\frac{cd\varphi}{\sqrt{a^2-c^2}.\cos.^2\varphi}$$

$$\cos.^2\nu\sin\nu.d\nu=\frac{-c^3\,tg.^2\varphi\,d\varphi}{(a^2-c^2.)^{\frac{3}{2}}\cos.^2\varphi.}$$

а, слѣдовательно

$$\frac{\sin\nu.d\nu.}{(a^2\cos.^2\nu+c^2\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}}(b^2\cos.^2\nu+c^2\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-d\varphi}{c\sqrt{a^2-c^2}.\Delta}$$

$$\frac{\cos.^2\nu\sin\nu\,d\nu}{(a^2\cos.^2\nu+c^2\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}}(b^2\cos.^2\nu+c^2\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-c}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{tg^2\varphi.d\varphi}{\Delta}.$$

слѣдовательно интегрируя и перемѣнивъ знаки, какъ мы уже сказали для того, чтобы интегрировать отъ $\varphi=o$, мы найдемъ:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\nu\,d\nu}{(a^2\cos.^2\nu+c^2\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}}(b^2\cos.^2\nu+c^2\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\frac{1}{c\sqrt{a^2-c^2}}\varpi arc\left(tg\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c^2}\right)$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos.^2\nu\sin\nu.d\nu}{(a^2\cos^2.\nu+c^2\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}}(b^2\cos.^2\nu+c^2\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}}}=\frac{c}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{0}^{\varphi}\frac{tg^2\varphi.d\varphi}{\Delta}$$

поэтому

$$a^2A+b^2B+c^2C=\frac{4\pi f\varrho abc}{\sqrt{a^2-c^2}}\varpi arc\left(tg.\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c^2}\right)$$

$$C=\frac{4\pi f\varrho abc}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{0}^{\varphi}\frac{tg.^2\varphi.d\varphi}{\Delta}$$

но означая буквою m массу эллипсоида, получимъ

$4\pi\varrho abc = 3m$; поэтому

$$a^2A + b^2B + c^2C = \frac{3fm}{\sqrt{a^2 - c^2}}\varpi\, arc.\left(tg.\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c^2}\right)$$

$$C = \frac{3fm}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0 \frac{tg^2\varphi d\varphi}{\Delta}$$

буквою ϖ означаютъ эллиптическую функцію перваго вида, k модуль этой функціи

и $arc.\, tg\sqrt{\frac{a^2-c^2}{c^2}} = arc.\cos.\frac{c}{a}$ есть ея амплитуда.

Чтобъ привести $\int\frac{tg^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}$ къ эллиптической функціи, возмемъ формулу

$$d.(\Delta tg.\varphi) = \Delta\frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi} + tg.\varphi.d\Delta$$

Но $$d\Delta = -\frac{k^2\sin\varphi.\cos.\varphi d\varphi}{\Delta}$$

поэтому:

$$tg.\varphi d\Delta = -\frac{k^2\sin^2\varphi d\varphi}{\Delta}$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{\cos.^2\varphi} = \frac{(1 - k^2\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta\cos.^2\varphi} = \frac{d\varphi}{\Delta\cos.^2\varphi} - \frac{k^2 tg^2\varphi d\varphi}{\Delta}$$

къ тому же:

$$\frac{d\varphi}{\Delta\cos.^2\varphi} = \frac{(\cos.^2\varphi + \sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta\cos.^2\varphi} = \frac{d\varphi}{\Delta} + \frac{tg^2\varphi d\varphi}{\Delta}$$

поэтому будетъ:

$$\frac{\Delta d\varphi}{\cos.^2\varphi} = \frac{d\varphi}{\Delta} + (1 - k^2)\frac{tg^2\varphi d\varphi}{\Delta}$$

а слѣдовательно, означая $1 - k^2$ буквою k'^2:

$$d(\Delta tg.\varphi) = \frac{d\varphi}{\Delta} - \frac{k^2\sin^2\varphi d\varphi}{\Delta} + \frac{k'^2 tg^2\varphi d\varphi}{\Delta}$$

Интегрируя это выраженіе, находимъ:

$$\Delta\sqrt{\frac{a^2-c^2}{c^2}} = \varpi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right) - k^2\pi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right) + k'^2\int_0^{\varphi}\frac{tg^2\varphi d\varphi}{\Delta}$$

откуда получаемъ:

$$\int_0^{\varphi}\frac{tg^2\varphi d\varphi}{\Delta} = \frac{\Delta\sqrt{a^2-c^2}}{ck'^2} + \frac{k^2}{k'^2}\pi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{k'^2}\varpi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right).$$

И такъ:

$$a^2A + b^2B + c^2C = \frac{3fm}{\sqrt{a^2-c^2}}\varpi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right)$$

$$C = \frac{3fm}{(b^2-c^2)\sqrt{a^2-c^2}}\left[\frac{b\sqrt{a^2-c^2}}{ac} + k^2\pi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right) - \varpi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right)\right].$$

гдѣ буква π означаетъ эллиптическую функцію втораго вида. Поэтому, подставляя въ выраженіе для ω^2 предъидущую величину $a^2A + b^2B + c^2C$ и $4\pi f\varrho$ вмѣсто $A + B + C$, мы получимъ:

$$\omega^2 = \frac{3fm\left[(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\varpi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right) - 3abc\sqrt{a^2-c^2}\right]}{[(a^2+b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-6a^2b^2c^2)]\sqrt{a^2-c^2}}$$

такимъ образомъ скорость вращенія выразится помощію самой простѣйшей изъ эллиптическихъ функцій, т: е: помощію функціи перваго вида. Что касается до отношенія между полуосями a, b, c, необходимаго для равновѣсія эллипсоида, то мы получимъ его, сравнивая между собою два различныя выраженія для C, именно такое:

$$C = \frac{a^2b^2[(a^2+b^2)(A+B+C) - 2(a^2A+b^2B+c^2C)]}{(a^2+b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) - 6a^2b^2c^2}$$

$$= \frac{3fmab\left[(a^2+b^2)\sqrt{a^2-c^2} - 2abc\varpi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right)\right]}{c\sqrt{a^2-c^2}[(a^2+b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) - 6a^2b^2c^2]}$$

съ слѣдующимъ:

$$C = \frac{3fm}{(b^2-c^2)\sqrt{a^2-c^2}}\left[\frac{b\sqrt{a^2-c^2}}{ac} + k^2\pi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right) - \varpi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right)\right].$$

Изъ этаго сравненія выведемъ:

$$\frac{b\sqrt{a^2-c^2}}{ac} + k^2\pi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right) - \varpi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right) =$$

$$\frac{ab(b^2-c^2)}{c}\left[\frac{(a^2+b^2)\sqrt{a^2-c^2} - 2abc\varpi(arc.\cos.\frac{a}{c})}{(a^2+b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) - 6a^2b^2c^2}\right]$$

или лучше:

$$\pi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right) =$$

$$\frac{a(a^2-c^2)[a(a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2)\varpi(arc.\cos.\frac{c}{a}) - bc(2a^2-b^2)\sqrt{a^2-c^2}]}{a[(a^2+b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) - 6a^2b^2c^2]}.$$

Вотъ самая простѣйшая формула для показанія отношенія между полуосями a, b, c; отношенія, необходимаго для равновѣсія эллипсоида. Она не столь проста какъ та, которуюдоставила намъ ω^2, потому что эта послѣдняя не заключаетъ въ себѣ $\pi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right)$.

Послѣднія два уравненія:

$$\pi.\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right) =$$

$$\frac{(a^2-c^2)\left[a(a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2)\varpi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right) - bc(2a^2-b^2)\sqrt{a^2-c^2}\right]}{a[(a^2+b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) - 6a^2b^2c^2]}$$

$$\omega^2 = \frac{3fm\left[(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\varpi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right) - 3abc\sqrt{a^2-c^2}\right]}{[(a^2+b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) - 6a^2b^2c^2]\sqrt{a^2-c^2}}$$

заключаютъ полное рѣшеніе предложеннаго нами вопроса. Имъ можно дать другой удобнѣйшій видъ; для этого положимъ, что

$$arc.\cos.\frac{c}{a} = \varphi, \text{ или } c = a\cos.\varphi$$

то зная, что $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} = k^2$ будетъ:

$$b^2 = a^2 - k^2(a^2 - c^2) = a^2(1 - k^2\sin^2\varphi).$$

а слѣдовательно $b = a\,\Delta\varphi$,

гдѣ мы полагаемъ, сообразно съ означенiемъ, употребляемымъ въ эллиптическихъ функцiяхъ

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}.$$

Подставляя вмѣсто c и b ихъ величины, нами выведенныя, будемъ имѣть:

$$\pi\varphi = \frac{(1 - k^2\sin^4\varphi)\varpi\varphi - \sin\varphi\cos.\varphi(1 + k^2\sin^2\varphi)\Delta\varphi}{(2 - k^2)\Delta\varphi^2 + k^4\sin^2\varphi\cos.^2\varphi}$$

$$\frac{\omega^2}{4\pi\varrho f} = \frac{[\cos.^2\varphi + (1 + \cos.^2\varphi)\Delta\varphi]\varpi\varphi - 3\sin\varphi\cos.\varphi\Delta\varphi}{[(2 - k^2)\Delta\varphi^2 + k^4\sin^2\varphi\cos.^2\varphi]\sin^2\varphi}\cdot\frac{\Delta\varphi}{tg.\varphi}$$

Прежде нежели пойдемъ далѣе, остановимся на время на этихъ формулахъ, и объяснимъ одно обстоятельство, въ которомъ, можетъ быть, встрѣтятъ нѣкоторое затрудненiе мои читатели.

До сихъ поръ мы относили нашъ эллипсоидъ къ неподвижнымъ осямъ; но можно бы было подумать, что этаго нельзя сдѣлать, и что слѣдовательно весь нашъ анализъ не можетъ имѣть мѣста. Чтобъ уничтожить всякое сомнѣнiе, отнесемъ его къ неподвижнымъ осямъ и означимъ чрезъ x', y', z'; координаты эллипсоида, къ нимъ отнесеннаго, при концѣ извѣстнаго времени t, прошедшаго, съ тѣхъ поръ, какъ эти неподвижныя оси были главными осями; то мы будемъ имѣть для $t = o$, $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ для всѣхъ точекъ, и такъ какъ тоже мы имѣемъ:

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

то найдемъ

$$x'\frac{dx'}{dt}+y'\frac{dy'}{dt}=o \quad \text{или}$$

$$\frac{dx'}{y'}=-\frac{dy'}{x'}=\pm\frac{\sqrt{dx'^2+dy'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=i\,\omega\,dt$$

поставляя i вмѣсто ± 1. И такъ будетъ

$$dx'=i\omega y'dt,\; dy'=-i\omega x'dt.$$

откуда

$$dx'+\lambda dy'=i\omega\,(y'-\lambda x')\,dt$$

$$=-i\omega\lambda\left(x'-\frac{y'}{\lambda}\right)dt.$$

и такъ какъ λ есть количество совершенно произвольное, то можно положить, что

$$-\frac{1}{\lambda}=\lambda \text{ и получится}$$

$$dx'+\lambda\,dy'+=-i\omega\lambda\,(x'+\lambda y')\,dt, \text{ и } \lambda^2+1=o$$

откуда слѣдуетъ:

$$x'+\lambda y'=Ae^{-i\omega\lambda t}=(x+\lambda y)\,e^{-i\omega\lambda t}.$$

но $\lambda=\pm\sqrt{-1}$ или $\lambda=i\sqrt{-1}$, и будемъ имѣть:

$$x'+iy'\sqrt{-1}=(x+iy\sqrt{-1})\;\bar{e}^{\,\omega t\sqrt{-1}}$$

откуда:

$$x'=x\;\cos.\omega t+iy\sin.\omega t.$$
$$y'=y\;\cos.\omega t-ix\sin.\omega t.$$

и слѣдовательно

$$x=x'\;\cos.\omega t-iy'\sin.\omega t$$
$$y=y'\;\cos.\omega t+ix'\sin.\omega t.$$
$$z=z'$$

поэтому уравненіе эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

отнесенное къ неподвижнымъ осямъ, сдѣлается:

$$\left(\frac{\cos.^2\omega t}{a^2}+\frac{\sin^2\omega t}{b^2}\right)x'^2+\left(\frac{\cos.^2\omega t}{b^2}+\frac{\sin^2\omega t}{a^2}\right)y'^2$$

$$+\frac{z'^2}{c^2}+2i\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x'y'\cos.\omega t.\sin\omega t=1$$

постараемся теперь найти это же самое уравненіе по началамъ Гидростатики. Мы имѣемъ:

$$\frac{dx'}{y'}=-\frac{dy'}{x'}=i\,\omega\,dt$$

$$\text{откуда } \frac{dx'}{dt}=i\omega y';\ \frac{dy'}{dt}=-i\omega x'$$

$$\text{поэтому: } \frac{d^2x'}{dt^2}=i\omega.\frac{dy'}{dt}=-\omega^2x',$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2}=-i\omega\frac{dx'}{dt}=-\omega^2y'.$$

поэтому слагающія силы производящей движеніе, суть ω^2x' и ω^2y'. Означая чрезъ $+X'$, $+Y'$, $+Z'$ притяженія параллельныя неподвижнымъ осямъ, мы получимъ:

$$(X'+\omega^2x')\,dx'+(Y'+\omega^2y')\,dy'+Z'dz'=o.$$

эти же самыя притяженія, относительно къ подвижнымъ осямъ суть:

$$-Ax,\ -By,\ -Cz$$

и мы имѣемъ слѣдовательно въ отношеніи къ неподвижнымъ:

$$X'=-(Ax\cos.\omega t+i\,By\sin.\omega t)$$
$$Y'=-(By\cos.\omega t-i\,Ax\sin.\omega t)$$
$$Z'=-Cz.$$

подставляя вмѣсто x, y, z величины ихъ въ x', y', z' получимъ:

$$X' = -[(A\cos.^2\omega t + B\sin^2\omega t)x' + i(B-A)y'\cos\omega t\sin\omega t]$$
$$Y' = -[(B\cos.^2\omega t - A\sin^2\omega t)y' + i(B-A)x'\sin\omega t.\cos\omega t]$$
$$Z' = -Cz'.$$

и уравненіе поверхности сдѣлается такимъ:

$$(A\cos.^2\omega t + B\sin^2\omega t - \omega^2)x'dx' + (B\cos.^2\omega t + A\sin^2\omega t - \omega^2)y'dy'$$
$$+ Cz'dz' + i(B-A)\cos.\omega t\sin\omega t.d(x'y') = 0,$$

которое интегрируя, получимъ:

$$(A\cos.^2\omega t + B\sin^2\omega t - \omega^2)x'^2 + (B\cos^2\omega t + A\sin^2\omega t - \omega^2)y'^2$$
$$+ Cz'^2 + 2i(B-A)\cos.\omega t\sin\omega t x'y' = \lambda,$$

гдѣ λ есть произвольная функція отъ t, поэтому сравнивая съ предъидущимъ, будемъ имѣть:

$$\frac{A\cos.^2\omega t + B\sin^2\omega t - \omega^2}{\lambda} = \frac{\cos.^2\omega t}{a^2} + \frac{\sin^2\omega t}{b^2}$$
$$\frac{B\cos.^2\omega t + A\sin^2\omega t - \omega^2}{\lambda} = \frac{\cos.^2\omega t}{b^2} + \frac{\sin^2\omega t}{a^2}$$
$$\frac{C}{\lambda} = \frac{1}{c^2}, \quad \frac{B-A}{\lambda} = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2};$$

два послѣднія уравненія показываютъ, что λ независимо отъ dt; чтобы удовлетворить двумъ первымъ, напишемъ ихъ въ такомъ видѣ:

$$\frac{A\cos.^2\omega t + B\sin^2\omega t - \omega^2(\sin^2\omega t + \cos.^2\omega t)}{\lambda} = \frac{\cos.^2\omega t}{a^2} + \frac{\sin^2\omega t}{b^2}$$
$$\frac{B\cos.^2\omega t + A\sin^2\omega t - \omega^2(\sin^2\omega t + \cos.^2\omega t)}{\lambda} = \frac{\cos.^2\omega t}{b^2} + \frac{\sin^2\omega t}{a^2}$$

или

$$\frac{(A-\omega^2)}{\lambda}\cos.^2\omega t + \frac{(B-\omega^2)}{\lambda}\sin^2\omega t = \frac{\cos.^2\omega t}{a^2} + \frac{\sin^2\omega t}{b^2}$$
$$\frac{(B-\omega^2)}{\lambda}\cos.^2\omega t + \frac{(A-\omega^2)}{\lambda}\sin^2\omega t = \frac{\cos.^2\omega t}{b^2} + \frac{\sin^2\omega t}{a^2}$$

откуда выходитъ:

$$\frac{A-\omega^2}{\lambda} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{B-\omega^2}{\lambda} = \frac{1}{b^2};$$

эти два уравненія очевидно содержатъ и такое:

$$\frac{B - A}{\lambda} = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2},$$

поэтому всѣ приводятся къ такимъ:

$$\frac{A - \omega^2}{\lambda} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{B - \omega^2}{\lambda} = \frac{1}{b^2}, \quad \frac{C}{\lambda} = \frac{1}{c^2}$$

но эти уравненія были найдены, относя эллипсоидъ къ подвижнымъ осямъ; поэтому нашъ анализъ, предъ этимъ изложенный, совершенно справедливъ, а слѣдовательно и всѣ формулы, какія онъ намъ доставилъ, совершенно точны.

Мы видѣли, что притяженія эллипсоида на точку, находящуюся на поверхности его, суть: $-Ax$, $-By$, $-Cz$; легко можно увѣриться, что тѣ же самыя притяженія принадлежатъ и точкѣ, внутри его находящейся. Что касается до самыхъ величинъ A, B и C, то ихъ безъ всякаго труда можно найти изъ предъидущаго; въ самомъ дѣлѣ мы имѣемъ:

$$A + B + C = 4\pi f \rho$$

$$a^2 A + b^2 B + c^2 C = \frac{3fm}{\sqrt{a^2 - c^2}} \varpi \left(arc. \cos. \frac{c}{a} \right)$$

$$C = \frac{3fm}{(b^2 - c^2)\sqrt{a^2 - c^2}} \left[\frac{b\sqrt{a^2 - c^2}}{ac} + k^2 \pi \left(arc. \cos. \frac{c}{a} \right) - \varpi \left(arc. \cos. \frac{c}{a} \right) \right]$$

откуда будетъ:

$$A = \frac{\frac{3fm}{\sqrt{a^2 - c^2}} \varpi \left(arc. \cos. \frac{c}{a} \right) + (b^2 - c^2)C - 4\pi \rho b^2}{a^2 - b^2}$$

$$B = \frac{4\pi f \rho a^2 - \frac{3fm}{\sqrt{a^2 - c^2}} \varpi \left(arc. \cos. \frac{c}{a} \right) - (a^2 - c^2)C}{a^2 - b^2}$$

подставляя вмѣсто C его величину и сокращая, получимъ:

$$A = \frac{3fm}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\pi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right)$$

$$B = \frac{3fm}{(b^2-c^2)\sqrt{a^2-c^2}}\left[\varpi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right)-\pi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right)-\frac{c\sqrt{a^2-c^2}}{ab}\right]$$

$$C = \frac{3fm}{(b^2-c^2)\sqrt{a^2-c^2}}\left[k^2\pi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right)-\varpi\left(arc.\cos.\frac{c}{a}\right)+\frac{b\sqrt{a^2-c^2}}{ac}\right]$$

тоже притяженіе выраженное чрезъ количество φ, привело бы насъ къ такимъ формуламъ:

$$A = 4\pi f\varrho\frac{\cos.\varphi d\varphi}{\sin^3\varphi}\pi\varphi$$

$$B = \frac{4\pi f\varrho\cos.\varphi\Delta\varphi}{k'^2\sin^3\varphi}\left[\varphi\varpi-\pi\varphi-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}\right]$$

$$C = \frac{4\pi f\varrho\cos.\varphi\Delta\varphi}{k'^2\sin^3\varphi}\left[k^2\pi\varphi-\varpi\varphi+\frac{\sin\varphi\Delta\varphi}{\cos.\varphi}\right]$$

эти выраженія хороши для какого либо эллипсоида; но для эллипсоида такого, который бы удовлетворялъ равновѣсію однородной жидкости; предъидущія выраженія могутъ упроститься, потому что въ нихъ можно исключить эллиптическую функцію втораго вида $\pi\varphi$, и мы получимъ для такихъ эллипсоидовъ:

$$A = \frac{3fm}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[\frac{a(a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2)\varpi(\text{arc.cos.}\frac{c}{a})-bc(2a^2-b^2)\sqrt{a^2-c^2}}{a[(a^2+b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-6a^2b^2c^2]}\right]$$

$$B = \frac{3fm}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[\frac{b(a^2b^2+b^2c^2-a^2c^2)\varpi(\text{arc.cos.}\frac{c}{a})-ac(2b^2-a^2)\sqrt{a^2-c^2}}{b[(a^2+b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-6a^2b^2c^2]}\right]$$

$$C = \frac{3fm}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[\frac{ab(a^2+b^2)\sqrt{a^2-c^2}-2a^2b^2c.\varpi\varphi}{c[(a^2+b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-6a^2b^2c^2}\right]$$

Введя сюда количество φ, формулы эти преобразуются въ такія:

$$A = 4\pi\varrho f\frac{\cos.\varphi\Delta\varphi}{\sin.^3\varphi}\left[\frac{(1-k^2\sin.^4\varphi)\varpi\varphi-\sin.\varphi\cos.\varphi\Delta\varphi(1+k^2\sin.^2\varphi)}{(2-k^2)\Delta\varphi^2-k^4\sin.^2\varphi\cos.\varphi}\right]$$

$$B =$$

$$4\pi\varrho f\frac{\cos.\varphi\Delta\varphi}{\sin.^3\varphi}\left[\frac{(\Delta\varphi^2 - k^2\sin.^2\varphi\cos.^2\varphi)\varpi\varphi - \frac{\sin.\varphi\cos.\varphi}{\Delta\varphi}\left(1 - 2k^2\sin.^2\varphi\right)}{(2-k^2)\Delta\varphi^2 + k^4\sin.^2\ \cos.^2\ .}\right]$$

$$C = 4\pi\varrho f\frac{\cos.\varphi\Delta\varphi}{\sin.^3\varphi}\left[\frac{tg.\varphi\,\Delta\varphi(2 - k^2\sin.^2\varphi) - 2\Delta\varphi^2\varpi\varphi}{(2-k^2)\Delta\varphi^2 + k^4\sin.^2\varphi\cos.^2\varphi}\right]$$

Притяженія же на какую нибудь точку (x, y, z) эллипсоида, внутри его или на поверхности суть:

$$-Ax, -By, -Cz$$

равнодѣйствующая этихъ притяженій, будетъ:

$$\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}$$

направленіе ея составитъ съ осями координатъ углы, которыхъ косинусы суть:

$$\frac{-Ax}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}},\ \frac{-By}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}},$$

$$\frac{-Cz}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}}$$

координаты x, y, z отнесены къ главнымъ осямъ. Силы, которыми будутъ побуждаемы точки, находящіяся на поверхности эллипсоида, разложенныя параллельно осямъ координатъ; таковы:

$$-(A - \omega^2)x,\ -(B - \omega^2)y,\ -Cz.$$

Равнодѣйствующая ихъ будетъ:

$$\sqrt{(A - \omega^2) + (B - \omega^2)^2 + C^2z^2}$$

или такъ какъ:

$$A - \omega^2 = \frac{h}{a^2} = \frac{c^2C}{a^2};$$

$$B - \omega^2 = \frac{h}{b^2} = \frac{c^2C}{b^2};$$

то равнодѣйствующая будетъ:

$$c^2 C \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

и она будетъ составлять съ осями координатъ углы, которыхъ косинусами будутъ:

$$\frac{-x}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}, \quad \frac{-y}{b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

$$\frac{-z}{c^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z}{c^4}}}$$

Сдѣлаемъ теперь приложенiе выведенныхъ нами двухъ главныхъ формулъ, необходимыхъ для равновѣсiя эллипсоидовъ, именно:

$$\pi\varphi = \frac{(1 - k^2 \sin.^4 \varphi)\,\varpi\varphi - \sin.\varphi\cos.\varphi\,(1 + k^2\sin.^2\varphi)\,\Delta\varphi}{(2 - k^2)\,\Delta\varphi^2 + k^4 \sin.^2\varphi\cos.^2\varphi}$$

$$\frac{\omega^2}{4\pi f} = \frac{[\cos.^2\varphi + (1 + \cos.^2\varphi)\Delta\varphi^2]\varpi\varphi - 3\sin.\varphi\cos.\varphi\Delta\varphi}{(2 - k^2)\,\Delta\varphi^2 + k^4\sin.^2\varphi\cos.^2\varphi} - \frac{\Delta\varphi}{\sin.^2\varphi\, tg.\varphi}.$$

къ одному весьма важному случаю, — къ опредѣленiю фигуры земли, т. е. опредѣлимъ помощiю этихъ формулъ ексцентрицитетъ меридiональнаго элипсоида. Здѣсь мы будемъ имѣть $a = b$, потому что эллипсъ сдѣлается кругомъ-экваторомъ; поэтому $k = o$, и слѣдовательно $\varpi\varphi = \varphi$, и будетъ

$$\pi\varphi = \int_o^\varphi \sin.^2\varphi\, d\varphi = \frac{\varphi - \sin.\varphi\cos.\varphi}{2}; \quad \Delta\varphi = 1.$$

и такъ первое изъ нашихъ условныхъ уравненiй сдѣлается такимъ:

$$\frac{\varphi - \sin.\varphi\cos.\varphi}{2} = \frac{\varphi - \sin.\varphi\cos.\varphi}{2}$$

т. е. будетъ торждественнымъ, а потому оно намъ ничего и не покажетъ. Второе уравненіе приведется къ:

$$\frac{\omega^2}{4\pi\varrho f}=\frac{(1+2\cos.^2\varphi)\varphi-3\sin.\varphi\cos.\varphi}{2\sin.^2\varphi\, tg.\varphi}$$
$$=\frac{(\sin.^2\varphi+3\cos.^2\varphi)\varphi-3\sin.\varphi\cos.\varphi}{2\sin.^2\varphi\, tg.\varphi.}$$

раздѣляя числителя и знаменателя на $\cos.^2\varphi$ найдемъ:

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho f}=\frac{(3+tg^2\varphi)\varphi-3\,tg.\,\varphi}{tg^3\varphi.}$$

сдѣлаемъ для сокращенія:

$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho f}=n$, то будемъ имѣть:

$$n=\frac{(3+tg^2\varphi)\varphi-3\,tg.\,\varphi}{tg^3\varphi}$$

$$\text{откуда } \varphi=\frac{3\,tg.\,\varphi+n\,tg.^3\varphi.}{3+tg^2\varphi}$$

Съ помощію этаго то трансцендентнаго уравненія надобно опредѣлить величину нашего эксцентриситета т. е. величину $tg.\,\varphi=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{c^2}}$. Положимъ для краткости $tg.\,\varphi=t$, то получимъ:

$$\text{arc.}\,tg.\,t=\frac{3\,t+nt^3}{3+t^2} \text{ гдѣ}$$

$$n=\frac{(3+t^2)\,\text{arc.}\,tg.\,t-3\,t}{t^3}$$

надобно опредѣлить вещественные корни этаго уравненія: каждому корню будетъ соотвѣтствовать уравненіе:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

которое, по причинѣ $t^2=\frac{a^2}{c^2}-1$ сдѣлается

$$x^2+y^2+(1+t^2)\,z^2=a^2$$

Но очевидно, что если $t=\pm\alpha=$ есть корень этаго уравненія, то $t=\mp\alpha$ будетъ тоже корнемъ его, и какъ къ тому же, въ уравненіе эллипсоида, входитъ только лишь t^2 то можно разсматривать одни только положительные корни нашего уравненія. Предположимъ, что:

$$f(t)=\frac{3t+nt^3}{3+t^2}-\text{arc. }tg.\,t=o.$$

то получимъ:

$$f'(t)=\frac{t^2[nt^4-2(2-5n)\,t^2+9n]}{(3+t^2)^2\,(1+t^2)}.$$

Такимъ образомъ уравненіе $f(t)=o$, имѣетъ тройной корень $t=o$; но этотъ корень не соотвѣтствуетъ вопросу, потому что онъ даетъ $n=o$, а потому мы и не будемъ болѣе его разсматривать. Теперь разсмотримъ корни уравненія:

$$f'(t)=o.$$

Эти корни очевидно будутъ корнями уравненія:

$$t^4-2\left(\frac{2}{n}-5\right)t^2+9=o$$

Для вещественности корней необходимо, чтобъ было $\frac{2}{n}-5$ количество положительное т: е: $\frac{2}{n}-5>o$ или $n<\frac{2}{5}$, безъ этаго корни уравненія $f'(t)=o$ будутъ

мнимыми; они будутъ мнимыми тоже и тогда, когда будетъ $\frac{2}{n}-5<3$. Для $\frac{2}{n}-5=3$ т: е: для $n=\frac{1}{4}$ получимъ $(t^2-3)^2=o$, откуда $t=\sqrt{3}$; и этотъ корень будетъ двойной.

Для $n<\frac{1}{4}$ уравненіе будетъ имѣть два корня различные. Теперь, такъ какъ весьма легко увѣриться, что функціи $f(t)$, $f'(t)$, обѣ суть положительныя для весьма малыхъ величинъ t, поэтому, если $n>\frac{1}{4}$ или $=\frac{1}{4}$, то $f'(t)$ будетъ всегда положительною, дѣлаясь только лишь однажды равною нулю, слѣдовательно $f(t)$ будетъ постоянно возрастающею и слѣдовательно она никогда не сдѣлается равною нулю. Предположимъ, что $n<\frac{1}{4}$, то $f'(t)$ будетъ имѣть два различные корня т: е:

$$t=\sqrt{\frac{2}{n}-5\mp 2\sqrt{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-4\right)}}$$

отъ $t=o$ до $t=\sqrt{\frac{2}{n}-5-2\sqrt{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-4\right)}}$

$f(t)$ будетъ возрастающею:

$$\text{отъ } t=\sqrt{\frac{2}{n}-5-2\sqrt{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-4\right)}}$$

она будетъ уменьшающеюся, потомъ отъ

$t=\sqrt{\frac{2}{n}-5+2\sqrt{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-4\right)}}$ до $t=\infty$ она снова будетъ возрастающею и сдѣлается $=\infty$ для $t=\infty$. Все приводится теперь къ тому, чтобъ опредѣлить $f(t)$ будетъ ли для

$$t = \sqrt{\frac{2 - 5n + \sqrt{(1-n)(1-4)}}{n}}$$

величина положительная, равная нулю или отрицательная. Въ первомъ случаѣ $f(t)$ не будетъ имѣть вещественныхъ корней; во второмъ она будетъ имѣть два корня равные, и два различные въ третьемъ случаѣ.

Подставляя предъидущую величину t въ $f(t)$ найдемъ, что для $4n = 1$ она будетъ количествомъ положительнымъ, дѣлая же $n = \frac{1}{n} = 0,2$, количествомъ отрицательнымъ. И такъ $n > 0,\ 2$ и $n < \frac{1}{4}$ т: е: $n < 0,25$; бравъ между ними среднюю величину, т: е: взявъ $n = 0,\ 221$ увидимъ, что эта величина слишкомъ мала, такъ что n находится между 0, 25 и 0, 221, бравъ среднюю между ними т: е: $n = 0,\ 23$ опять увидимъ, что эта величина слишкомъ велика, поэтому $n = 0,\ 22$. Чтобъ найти слѣдующую цыфру, сдѣлаемъ $n = 0,\ 22, + \varepsilon$, гдѣ ε есть весьма малая дробь, а потому мы пренебрежемъ степени ея высшія первой, и такимъ образомъ найдемъ $n = 0,\ 2246 + \varepsilon$ и т. д. Для величинъ $n < 0,\ 2246$, нѣтъ равновѣсія при эллиптической формѣ для $n = 0,\ 2246$ есть одинъ случай равновѣсія, а для $n < 0,\ 2246$ два, Принимая для n величину такую чтобъ было или $n = 0,\ 2246\ldots$ или $n < 0,\ 2246\ldots.$ мы будемъ имѣть одну изъ двухъ эллиптическихъ фигуръ равновѣсія, и притяженіе:

$$c^2\ C\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

на точку, находящуюся на поверхности этой фигуры, по причинѣ $a = b$ приведется къ

$$c^2 C\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}} = c \quad C\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}};$$

но такъ какъ $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ или $\frac{x^2+y^2}{a^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$

то притяженіе приведется къ такому виду

$$c\,C\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)+\frac{z^2}{c^2}}$$

и какъ вмѣстѣ съ тѣмъ $\frac{a^2}{c^2}=1+t^2$, то этотъ видъ перемѣнится на такой:

$$c\,C\sqrt{\frac{1}{1+t^2}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)+\frac{z^2}{c^2}} = \frac{c.C}{\sqrt{1+t^2}}\sqrt{1+\frac{t^2 z^2}{c^2}}$$

припоминая же изъ предъидущаго, что:

$$C = 4\pi f\varrho\frac{\cos.\varphi\,\Delta\,\varphi}{\sin^2\varphi}\left[\frac{tg\,\varphi\,\Delta\,\varphi\,(2-k^2\sin^2\varphi)-2\,\Delta\,\varphi^2\,\varpi\varphi}{(2-k^2)\,\Delta\,\varphi^2+k^4\sin^2\varphi\cos.^2\varphi}\right]$$

и что въ разсматриваемомъ нами случаѣ $a=b$, поэтому $k=o$, $\Delta\,\varphi=1$, $\varpi\varphi=\varphi$, мы найдемъ:

$$C=\frac{4\pi\,\varrho f\cos.\varphi\,(tg.\,\varphi-\varphi)}{\sin^3\varphi}=\frac{4\pi\varrho f(1+tg.^2\varphi)(tg.\varphi-\varphi)}{tg^3\varphi}$$

$$=4\,\pi\,\varrho f\frac{(1+t^2)\,(t-\text{arc}.tg.\,t.)}{t^3}$$

$$\text{но arc}.tg.\,t=\frac{3\,t+nt^3}{3+t^2}; \text{ поэтому}$$

$$C=4\pi\varrho f\frac{(1-n)\,(1+t^2)}{3+t^2}$$

и притяженіе выразится такъ:

$$4\pi\varrho f(1-n)c\frac{\sqrt{(1+t^2)}}{3+t^2}\sqrt{1+\frac{t^2z^2}{c^2}}$$

полагая для сокращенія $x^2+y^2=u^2$, имѣемъ:

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ откуда } c^2u^2+a^2z^2=a^2c^2.$$

назовемъ буквою λ широту какого либо мѣста, то получимъ:

$$\frac{u}{\cos.\lambda}=\frac{z}{\sin\lambda}=\frac{\sqrt{c^2u^2+a^2z^2}}{\sqrt{c^2\cos.^2\lambda+a^2\sin^2\lambda}}=\frac{ac}{\sqrt{c^2\cos.^2\lambda+a^2\sin^2\lambda}}$$

поэтому

$$z=\frac{ac.\sin\lambda}{\sqrt{c^2\cos.^2\lambda+a^2\sin^2\lambda}}$$

откуда

$$\frac{z}{c}=\frac{a.\sin\lambda}{\sqrt{c^2\cos.^2\lambda+a^2\sin^2\lambda}}=\frac{\sin\lambda}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\cos.^2\lambda+\sin^2\lambda}}$$

но такъ какъ $\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{1+t^2}$ то и слѣдуетъ

$$\frac{z}{c}=\frac{\sin\lambda\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2\sin^2\lambda}}$$

когда подставимъ эту величину въ выраженіе притяженія, оно сдѣлается:

$$4\pi\varrho f(1-n)\frac{c\sqrt{1+t^2}}{3+t^2}\sqrt{\frac{1+2t^2\sin^2\lambda+t^4\sin^2\lambda}{1+t^2\sin^2\lambda}}$$

Чтобъ имѣть силу тяжести при Экваторѣ, надобно сдѣлать $z=o$, что дастъ

$$4\pi\varrho f(1-n)\frac{c\sqrt{1+t^2}}{3+t^2}$$

а при полюсахъ $z=c$, что дастъ:

$$4\pi\varrho f(1-n)\frac{c(1+t^2)}{3+t^2}$$

и такъ называя G силу тяжести при полюсахъ и, g при экваторѣ, получимъ:

$$\frac{G}{g}=\sqrt{1+t^2}.$$

такъ что отношенie G къ g есть такое же, какъ и отношенie между двумя осями a и c эллипсоида. Вообще означая чрезъ g силу тяжести при экваторѣ, мы получимъ для силы тяжести круговъ параллельныхъ:

$$A=g\sqrt{1+\frac{t^2z^2}{c^2}}=g\sqrt{\frac{1+2t^2\sin^2\lambda+t^4\sin^2\lambda}{1+t^2\sin^2\lambda}}$$

и означая буквою G силу тяжести при полюсахъ, получимъ:

$$G=g\sqrt{1+t^2}\quad\text{поэтому}$$

$$A=\frac{G\sqrt{1+\frac{t^2z^2}{c^2}}}{\sqrt{1+t^2}}$$

Теперь разсмотримъ корень уравненiя $f(t)=o$; чтобъ вещественный корень имѣлъ мѣсто, надобно, чтобъ было $n=o,2246\ldots$ или $n<o,2246\ldots$ Для предѣльной величины $n=o,2246\ldots$ уравненie $f(t)=o$ будетъ имѣть одинъ двойной корень, который въ тоже время будетъ наибольшимъ корнемъ уравненiя $t^4-2(\frac{2}{n}-5)t^2+9=0$

$$\text{т. е. } t=\sqrt{\frac{2-5n+\sqrt{(1-n)(1-4n)}}{n}}$$

Эта величина для n, даетъ для t такую $t=2,53$.
Для величины n меньшей нежели $0,2246\ldots$ находятся двѣ величины t, чтобъ ихъ найти, возьмемъ снова уравненie:

$$\frac{3t+nt^3}{3+t^2}=arc.tg.t.$$

раздѣля его на t, находимъ:

$$\frac{3+nt^2}{3+t^2}=\frac{arc.tg.t}{t.}$$

или еще лучше:

$$n+\frac{3(1-n)}{3+t^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+t^2x^2}$$

разлагая въ сторону по степенямъ t^2, найдемъ:

$$n+(1-n)\left[1-\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{3^2}t^4-\frac{1}{3^3}t^6+\&\ldots\right]$$

$$=1-\frac{t^2}{3}+\frac{t^4}{5}-\frac{t^6}{7}+\&\ldots.$$

или лучше:

$$\frac{n}{3}+(1-n)\left\{\frac{t^2}{3^2}-\frac{t^4}{3^3}+\frac{t^6}{3^4}-\&\ldots\right\}=\frac{t^2}{5}-\frac{t^4}{7}+\frac{t^6}{9}\&\ldots$$

пренебрегая t^4, найдемъ $n=\frac{(4+5n)}{15}t^2$, откуда

$t^2=\frac{15.n}{4+5n}$; если же удержимъ t^4, то получимъ:

$$n=\frac{4+5n}{15}t^2-\frac{20+7n}{63}t^4$$

или

$$5(20+7n)t^4-21(4+5n)^2+3^2.5.7.n=o.$$

откуда весьма легко можно найти величину t^2 болѣе приближенную.

Чтобы найти вторую изъ двухъ величинъ t, которая бы соотвѣтствовала величинѣ t *minimum*, замѣстимъ въ уравненіи,

$$n+\frac{3(1-n)}{3+t^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2t^2}$$

величину x другою, именно величиною $\frac{1}{x}$, то получимъ:

$$\frac{n+3(1-n)}{3+t^2}=\int_1^\infty \frac{dx}{t^2+x^2}$$

или лучше

$$\frac{n+3(1-n)}{3+t^2}=\int_0^\infty \frac{dx}{t^2+x^2}-\int_0^1 \frac{dx}{t^2+x^2}$$

но $\int_0^\infty \frac{dx}{t^2+x^2}=\frac{\pi}{2t}$ поэтому:

$$\frac{n+3(1-n)}{3+t^2}=\frac{\pi}{2t}-\int_0^1 \frac{dx}{t^2+x^2}$$

а такъ какъ

$$\frac{1}{t^2+x^2}=\frac{1}{t^2\left(1+\frac{x^2}{t^2}\right)} \text{ и } \frac{1}{3+t^2}=\frac{1}{t^2\left(1+\frac{3}{t^2}\right)}$$

то будетъ:

$$\frac{n+3(1-n)}{t^2}\left\{1-\frac{3}{t^2}+\frac{3}{t^4}-\&\ldots\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2t}-\frac{1}{t^2}\left\{1-\frac{1}{3t^2}+\frac{1}{5t^4}-\&\ldots\right\}$$

отбрасывая $\frac{1}{t^2}$ находимъ:

$$t=\frac{\pi}{2n}$$

удерживая же t^2 получаемъ:

$$\frac{n+3(1-n)}{t^2}=\frac{\pi}{2t}-\frac{1}{t^2} \text{ откуда:}$$

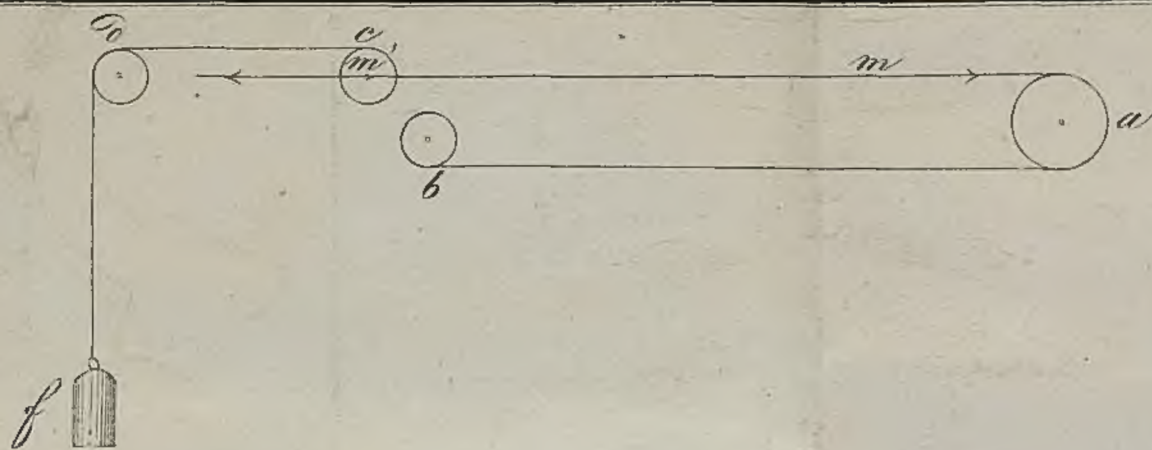
$$2nt^2-\pi t+2(4-3n)=0.$$

А отсюда:

$$t = \frac{\frac{1}{2}\pi + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 4(4-3n)n}}{2n}$$

можно бы было, если бы мы захотѣли, найти величину t, гораздо болѣе приблизительную.

КОНЕЦЪ.


c
c
m'
m
a
b
f
m
p
m'''
p'''
m'
p'
m''
p''
Q


2007056803